

Geometrias Não-Euclidianas

Exemplos

Dr. Celso Melchiades Doria
cmdoria@mtm.ufsc.br

Agradecimentos

É com muito prazer que agradeço à Organização e aos órgãos financiadores da II Bienal, realizada na UFBA, Salvador-BA, nos dias 25-19/10/2004, a oportunidade para expor e divulgar um assunto tão importante do conhecimento matemático.

Desta forma, espero estar contribuindo para apurar o *caldo cultural* necessário para termos na Matemática uma ciência viva e ativa no Brasil.

Estas notas fazem parte de um projeto maior [5] onde estudam-se as implicações das Geometrias Euclideana, Esférica e Hiperbólica à Topologia das Superfícies.

Sumário

Agradecimentos	iii
1 Introdução	3
1.1 Histórico	3
1.1.1 Axiomas de Euclides	6
2 Conteúdo Básico	9
2.1 Grupos	9
2.1.1 Subgrupos	12
2.2 Plano Tangente	13
2.3 Métricas Riemannina	14
2.3.1 Grupo de Isometria	19
3 Geometria Euclideana	21
3.1 Geodésicas em \mathbb{E}^2	21
3.2 Isometrias de \mathbb{E}^2	22
3.3 Relações Métricas em \mathbb{E}^2	31
4 Geometria Esférica	33
4.1 Métrica Esférica	33
4.1.1 A superfície S^2	33
4.1.2 Coordenadas Esféricas	34
4.2 Isometrias de S^2	35
4.3 Geodésicas de S^2	39
4.3.1 Fórmula da Distância e Relações Métricas em S^2	40
4.3.2 Área de um Triângulo Esférico	45
5 Geometria Hiperbólica	47
5.1 Espaço Hiperbólico	47
5.1.1 Reflexões no Espaço Hiperbólico	48
5.2 Geodésicas de \mathbb{H}^2	52
5.3 Isometrias de \mathbb{H}^2	54
5.4 Relações Métricas Hiperbólicas	58
5.4.1 Distância Hiperbólica	58
5.4.2 Convexidade e Ângulos em \mathbb{H}^2	61
5.4.3 Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos	61
5.4.4 Área de um Triângulo Hiperbólico	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico

Nós devemos o surgimento da Geometria aos coletores de impostos. De acordo com o historiador grego Herodotus (430 a.C.), o rei egípcio Sesostri III (1900 a.C.) dividiu todas as terras no Egito de maneira igual entre os seus habitantes com o intuito de cobrar-lhes um aluguel anual. No entanto, todos os anos as enchentes do rio Nilo cobriam partes das terras fazendo com que, aqueles cujas terras tivessem desaparecido embaixo das águas, fizessem objeção ao pagamento sobre as partes perdidas. Herodotus relata que a bondade de Sesostri levou-o a considerar o pedido dos prejudicados enviando pessoas capacitadas para avaliarem as extensões de terras perdidas e para refazerem os cálculos dos aluguéis devidos.

Desta forma, a Geometria surgiu juntamente com a necessidade de serem realizadas medidas que estimassem as distâncias, as áreas e os volumes, tendo em vista que para o coletor de impostos, para o viajante, para o negociante de terras, e para muitos outros, tais conceitos eram necessários no desempenho de suas atividades. O curioso, muito curioso devemos enfatizar, é que a partir de alguma época, talvez de um alguém, os métodos utilizados começaram a serem analisados de maneira muito mais criteriosa, profunda e abstrata do que a do simples homem que os aplicava em suas atividades. No período 8.000-1.000 a.C., diversas atividades evoluíram com o surgimento das civilizações, como por exemplo a agricultura, a escrita e o pensamento matemático. Se pensarmos sobre *porque ?* ou *como ?* os humanos começaram, a partir de um certo período, a sistematizar alguns dos conhecimentos adquiridos na época chegaremos a uma enorme e intrigante interrogação. Tão intrigante quanto a estabilidade dos elementos que compõem a natureza e a da existência de vida é a formação e o domínio do conhecimento.

Como não poderia deixar de ser, o pensamento matemático no decorrer dos seus primeiros 2000 anos utilizava-se de uma notação precaríssima para desenvolver a linguagem da matemática. Além disto, o conceito da natureza matemática era predominantemente *geométrica*, salvo algumas questões numéricas que misturavam-se misticismo e matemática; o exemplo clássico sendo a descoberta de $\sqrt{2}$.

Os gregos foram os primeiros a fazerem da matemática um estudo puramente teórico cujos processos são passíveis de aplicações em geral. Além disto, eles preocuparam-se em demonstrar suas afirmações. Devido a ausência da álgebra, a matemática grega desenvolveu-se pensando e agindo geometricamente. Eles não dispunham do conceito de número, apenas de proporções. Não obstante, estavam munidos de uma intuição fantástica e muita capacidade e objetividade de seus pensadores. Os babilônios e os egípcios tinham seus processos, mas não passaram do nível empírico.

Por volta de 300 a.C., Euclides escreveu o livro *Os Elementos* baseando-se em todo o conhecimento adquirido pela escola grega da época. Porém, a grande contribuição dos *Elementos* foi

a apresentação lógico-dedutiva dada a Geometria. Euclides preocupou-se em criar um conjunto de conceitos primitivos e axiomas dos quais derivam-se todos os resultados da Geometria. Tal procedimento era inédito e demonstrava compromisso com a veracidade dos resultados obtidos. A obra de Euclides *definiu* a Geometria pelos dois milênios seguintes.

Nestas notas, vamos tratar apenas da Geometria Plana visando deslumbrar os itens cruciais dos axiomas de Euclides que, como dissemos, definiram o que é uma geometria.

Por volta do século XVI d.C., surgiu na Europa a Geometria Analítica, ou Cartesiana, na qual fixam-se dois eixos ortogonais e atribuem-se um par de números reais à um ponto do plano. Isto possibilitou algebrizar muitas questões geométricas facilitando a sua compreensão e até a sua solução. Isto trouxe a matemática uma evolução notável que culminou com o surgimento do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral. As técnicas do Cálculo Diferencial e Integral possibilitaram tratar de problemas até então impossíveis de serem abordados com as técnicas que a matemática dispunha, sendo o da quadratura do círculo o mais famoso deles.

No início do século XVIII, as técnicas de Cálculo Diferencial e Integral já eram muito bem compreendidas e aplicadas. Nesta época, apesar do desenvolvimento da matemática da época, ainda restava a questão se o *Axioma das Paralelas* de Euclides poderia ser demonstrado a partir dos outros axiomas ou se, de fato, ele deveria ser um dos axiomas. Houveram vários matemáticos brilhantes que envolveram-se com o problema e alguns anunciaram demonstrações erradas.

No decorrer dos séculos XVII e XVIII, a geometria plana esteve absorvida com o problema do postulado das paralelas. Segundo D’Alembert, a polêmica sobre o axioma das paralelas e a incapacidade de chegarem a um entendimento matemático para uma situação tão simples era um escândalo.

Gauss havia sido colega, em Göttingen, de Farkas Bolyai, pai de Janós Bolyai. Em 1823, Janós Bolyai escreveu para seu pai as seguintes palavras:

“Eu descobri coisas tão maravilhosas que sinto-me aturdido ... do nada eu criei um estranho mundo novo.”

J. Bolyai referia-se ao fato de ter descoberto uma geometria não-euclideana. Sendo amigo de Farkas Bolyai, pai de J. Bolyai, Gauss ao ser informado da descoberta correspondeu-se com o colega para elogiar seu filho;

“Eu considero este jovem geômetra Bolyai um gênio de primeira ordem.”

Gauss aproveitou a oportunidade para comunicar de que ele próprio já havia descoberto aquele fato mas não havia publicado. Isto pode ser verdade, pois, por volta de 1817 Gauss estava convencido que o Axioma das paralelas de Euclides era independente dos outros postulados. Naquela época, Kant era um filósofo dominante e havia afirmado que *A geometria euclideana é uma necessidade inevitável do pensamento*. É possível que Gauss não tenha anunciado a sua descoberta para evitar polêmica.

Em 1818, Gauss foi contratado pelo Reinado Germânico de Hanover para realizar um trabalho de geodesia. Considerando a sua habilidade matemática e o fato que dominava as técnicas de Cálculo, Gauss debruçou-se sobre a seguinte questão colocada por ele próprio: como as técnicas de geodesia poderiam revelar a forma (curvatura) do planeta Terra? Colocando de outra maneira, será que um ser bidimensional (uma sombra) vivendo sobre a superfície da Terra pode determinar a forma da Terra? Em 1828, Carl Friedrich Gauss publicou o trabalho *General Investigations of Curved Surfaces* [7] no qual, pioneiramente, ele empregou as ferramentas de cálculo integral e diferencial para descobrir objetos geométricos *intrínsecos* sobre as superfícies; a curvatura sendo o principal deles. Ele descobriu o conceito de curvatura, hoje em dia chamada *Curvatura Gaussiana*, e respondeu afirmativamente a sua pergunta com o *Teorema Egregium*. A originalidade deste

trabalho, conscientemente revelada na tese de doutoramento de seu aluno Bernhard Riemann, foi demonstrar a possibilidade de haverem diversas geometrias além da euclidiana. Com seu trabalho, Gauss ajudou a responder a questão

O que é uma Geometria ?

É interessante mencionar que por volta do início do século II a.C., o grego Eratóstenes calculou o raio da Terra sem que houvesse nenhuma comprovação, além da observação do horizonte, de que a Terra era arredondada. Ele baseou-se em aspectos muito elementares da Geometria Plana. Um problema famoso entre os cartógrafos perguntava sobre a possibilidade de se construir um mapa da Terra com um fator de escala constante. Em 1775, Leonhard Euler apresentou a Academia de Ciências de São Petersburgo a solução para o problema demonstrando a impossibilidade de se construir tal mapa. Na ocasião, Euler não dispunha do conceito e das implicações que a curvatura causa à geometria de um espaço. Em 1916, Albert Einstein publicou a sua Teoria da Relatividade na qual propõe uma equação para determinar a curvatura do Universo (espaço-tempo), teoria esta completamente baseada nas idéias de geometria desenvolvidas por Riemann.

Até então, o conceito de geometria era o estabelecido pelo conjunto de axiomas formulados por Euclides em sua obra *Os Elementos* [?]. Assim, ficou claro para Gauss que os axiomas de Euclides originam um caso particular de Geometria e não a Geometria. Bernhard Riemann deixou claro que o conceito fundamental em geometria é o que hoje em dia denominamos de *métrica riemanniana*, o qual por simplicidade denominaremos simplesmente de métrica.

Embora tenha sido no trabalho de Riemann que a concepção do que é uma geometria tenha se tornado clara, o surgimento da Geometria Não-Euclideana é creditada aos matemáticos Bolyai e Lobachevsky's. Em 1829, Lobachevsky's publicou seu trabalho sobre a sua descoberta da geometria não-euclideana, trabalho este desenvolvido na Rússia de forma completamente independente; nem Gauss estava ciente de suas idéias e de seu trabalho. A contribuição de Bolyai e de Lobachevsky's foi descobrir que era possível alterar o axioma das paralelas de Euclides sem que uma contradição fosse criada com os outros axiomas. É bom ressaltar que eles não demonstraram a consistência dos axiomas. Isto deu origem à uma geometria não-euclideana cunhada de *geometria hiperbólica*.

Na época, as diferenças entre as geometrias euclideana e hiperbólica eram puramente formais, ou seja, diferiam no conjunto dos axiomas. Isto quer dizer que não havia um modelo concreto para a geometria hiperbólica, ou seja, não havia uma representação gráfica para os objetos geométricos, por exemplo, para uma *reta* hiperbólica. O primeiro modelo para a geometria hiperbólica foi criado por Eugenio Beltrami (1835-1900). A geometria esférica já era objeto de estudo devido a natureza dos problemas de navegação que eram importantíssimos, porém, os objetivos neste caso eram meramente computacionais.

As técnicas desenvolvidas por Gauss consistiam em estudar as propriedades geométricas de uma superfície X com as ferramentas do Cálculo. Ele observou que o comprimento de uma curva, a área e a *curvatura* eram objetos geométricos *intrínsecos*, ou seja dependiam apenas da métrica riemanniana. Além disto, estes são objetos invariantes por transformações do espaço que preservam a métrica riemanniana, denominadas de *isometrias*. Em suma, a métrica riemanniana possibilita definir o comprimento de uma curva e a área de uma região contidas numa superfície.

Euclides considerou que os elementos primitivos da geometria euclideana são *o ponto, a reta e o plano*. No conceito mais geral de geometria, os elementos primitivos são o espaço topológico, a estrutura diferenciável e a métrica riemanniana. A partir da métrica, definimos uma geodésica como sendo a curva que minimiza a distância entre dois pontos. Assim, o conceito euclidiano de reta é substituído pelo de geodésica. Sobre a superfície da esfera não existem retas, mas dados dois pontos existe uma única geodésica ligando-os. Desta forma, um triângulo geodésico é formado pelas geodésicas que ligam 3 pontos que não encontram-se sobre uma mesma geodésica.

O estudo de Gauss culminou com o resultado, conhecido como forma local do teorema de Gauss-Bonnet, que a soma dos ângulos internos α, β, γ de um triângulo geodésico Δ é dado por

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K, \quad K \text{ é a curvatura de } X \quad (1.1)$$

Observamos que quanto menor for o triângulo mais próximo de π estará a soma dos ângulos internos do triângulo.

Observando a fórmula 1.1, é natural considerarmos as situações onde a curvatura K do espaço é constante. Nestes casos, a área do triângulo é

$$K.A(\Delta) = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi,$$

da onde concluímos que,

1. $K = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$ (Geometria Euclideana).
2. $K > 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$, (Geometria Esférica)
3. $K < 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$, (Geometria Hiperbólica).

O objetivo destas notas é expor as geometrias *Euclideana*, *Esférica* e *Hiperbólica* dentro de um mesmo ponto de vista e descrever as relações métricas em cada uma delas. Devido as limitações de tempo, não introduziremos o conceito de curvatura mas sugerimos fortemente aos leitores que o façam.

1.1.1 Axiomas de Euclides

Façamos, brevemente, uma digressão aos Axiomas de Euclides para sermos críticos em relação a suas afirmações absolutas. Originalmente, Euclides formulou apenas 5 axiomas, mas no final do século *XIX* o matemático David Hilbert reformulou o conjunto dos axiomas para o conjunto atualmente utilizado. Considerando que os números reais só foram compreendidos no século *XIX* d.C., era impossível para Euclides formular um conjunto completo de axiomas. Tendo os objetos *ponto*, *reta* e *plano* como elementos primitivos, nos dias de hoje os Axiomas da Geometria Plana [1] são os seguintes;

Axiomas de Incidência

Axioma 1. Se a reta r está contida no plano, então existem pontos do plano que pertencem à r e pontos que não pertencem à r .

Axioma 2. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém ambos os pontos.

Axiomas de Ordem

Axioma 3. Dados três pontos distintos P_1, P_2 e P_3 sobre uma reta r , então um, e somente um, está entre os outros dois.

Axioma 4. Dados dois pontos distintos A e B , sempre existe um ponto C entre A e B , e um ponto D tal que B está entre A e D .

Axiomas de Mensurabilidade

Axioma 5. A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero, denominado de medida. Este número é zero se, e somente se, os pontos são coincidentes.

Axioma 6. Para toda reta r existe uma função biunívoca $f : \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que para todo par de pontos A e B sobre r tem-se que

$$d_f(A, B) = |f(A) - f(B)| \quad (1.2)$$

Axioma 7. Se o ponto C encontra-se entre os pontos A e B , então

$$d_f(A, B) = d_f(A, C) + d_f(C, B) \quad (1.3)$$

Axioma 8. Toda reta no plano determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a reta r .

Axioma 9. A todo par de semi-retas com a mesma extremidade corresponde um número maior ou igual a zero, denominado de medida do ângulo formado. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, as semi-retas são coincidentes.

Axioma 10. Fixada uma medida para o ângulo raso, denotada 180° , existe uma relação biunívoca entre o intervalo $[0, 180^\circ]$ e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano. A medida do ângulo formado pelas semi-retas corresponde à diferença das medidas atribuídas a cada uma das semi-retas.

Axioma 11. Se uma semi-reta \vec{OC} divide um ângulo $\angle AOB$, então $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{A\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}B}$.

Axioma de Congruência

Axioma 12. (LAL) Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, se $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\angle BAC \simeq \angle EDF$ e $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$, então $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$.

Axioma das Paralelas (5º-Axioma de Euclides)

Axioma 13. Por um ponto fora de uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela à r .

Comentários sobre os Axiomas

O Axioma 2 determina que os pontos A e B definem uma única reta r , enquanto o Axioma 6 diz que a distância entre A e B é o comprimento do segmento \overline{AB} determinado sobre r . Ou seja, na Geometria Euclideana não existe a possibilidade de que a curva que realiza a menor distância entre dois pontos não seja uma reta. É exatamente esta a dificuldade que os matemáticos do passado encontraram para entender porque o Axioma das Paralelas nem sempre é verdadeiro. Talvez, eles deveriam ter prestado mais atenção à geometria da superfície da Terra, assim como Gauss!

Originalmente, Euclides enunciou os seguintes Axiomas [4] (versão moderna) para a Geometria Plana;

Axioma 1. Dois pontos determinam uma única reta.

Axioma 2. A partir de qualquer ponto de uma reta é possível marcar sobre ela um segmento de comprimento arbitrário.

Axioma 3. É possível traçar uma circunferência com centro arbitrário e raio arbitrário.

Axioma 4. Todos os ângulos retos são iguais.

Axioma 5. Por um ponto do plano fora de uma reta passa uma única paralela a essa reta.

Cronologia (*fonte: Enciclopédia Britânica*)

1. 8000 a.C. - vestígios mais antigos de agricultura,
2. 3000 a.C. - vestígios mais antigos de civilizações.
3. 2000 a.C. - papiro de Rhindus, o documento matemático mais antigo no qual esta exposto a maneira de calcular a área de um triângulo
4. 776 a.C. - Primeiros Jogos Olímpicos
5. 700 a.C. - Primeira citações sobre Homero,
6. 585 a.C. - Eclipse previsto por Thales de Mileto,
7. 565 a.C. - Nascimento de Pitágoras,
8. 427 a.C. - Nascimento de Platão,
9. 300 a.C. - Euclides escreve os *Elementos*, em Alexandria.
10. 255 a.C. - Eratóstenes de Cyrene calcula o raio da Terra
11. 1637 d.C. - Fermat e Descarte trabalham na Geometria Analítica
12. 1650 d.C. - surgimento do Cálculo
13. 1684 d.C. - Leibniz publica *Nova Methodus pro Maximis e Minimus*
14. 1687 d.C. - Newton publica o *Principia Mathematica*
15. 1828 d.C. - Gauss publica *General Investigations of Curved Surfaces*.

Capítulo 2

Conteúdo Básico

2.1 Grupos

Os grupos são estruturas que surgem naturalmente no estudo de geometria.

Definição 2.1. Um conjunto G com uma operação $.G \times G \rightarrow G$ é um *grupo* se as condições seguintes são satisfeitas:

1. A operação é associativa, isto é

$$a.(b.c) = (a.b).c, \quad \text{para todos } a, b \text{ e } c \in G$$

2. Existe um elemento neutro, isto é

$$\exists e \in G \quad \text{tal que} \quad e.a = a.e = a, \quad \text{para todo } a \in G$$

3. Todo elemento possui um elemento inverso, isto é

$$\text{para todo } a \in G, \exists a^{-1} \in G \quad \text{tal que} \quad a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$$

Quando a operação satisfaz a propriedade adicional

$$a.b = b.a \quad \text{para todos } a \text{ e } b \in G$$

dizemos que o grupo é *abeliano*.

Seguem dos axiomas de grupo algumas propriedades básicas;

Proposição 2.1. 1. O elemento neutro é único

2. O elemento inverso é único

3. O 3º axioma para grupos é equivalente ao fato da equação $x.a = b$ ter uma única solução, a saber, $x = b.a^{-1}$

Demonstração.

seja e' um outro elemento identidade, então

$$e = e.e' = e'$$

seja b um outro elemento inverso de $a \in G$, então

$$a^{-1} = a^{-1}.e = a^{-1}.(a.b) = (a^{-1}.a).b = b$$

□

Exemplo 2.1. 1. Grupo dos Inteiros

$(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano infinito.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ a operação usual de soma de números inteiros;

$$(n, m) \rightarrow n + m.$$

2. Grupo dos Racionais

$(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{C}, +)$ são grupos abelianos infinitos.

3. Sejam $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - 0$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - 0$ e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - 0$. Considerando sobre estes conjuntos a operação de multiplicação, obtemos que (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{C}^*, \cdot) são grupos abelianos (multiplicativos)

4. Grupo Linear

$Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ é o grupo das matrizes $n \times n$ reais inversíveis. Se considerarmos a operação $\cdot : Gl_n(\mathbb{R}) \times Gl_n(\mathbb{R}) \rightarrow Gl_n(\mathbb{R})$ de multiplicação de matrizes segue que $(Gl_n(\mathbb{R}), \cdot)$ é um grupo não abeliano.

5. Grupo dos Complexos Unitários

Seja $U_1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ e considere $\cdot : U_1 \times U_1 \rightarrow U_1$ a operação induzida pela multiplicação de números complexos, então (U_1, \cdot) é um grupo abeliano.

6. Grupo de Rotações em \mathbb{R}^2

Uma rotação em \mathbb{R}^2 é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação a base canonica de \mathbb{R}^2 é dada por

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ao multiplicarmos matrizes de rotação temos a identidade $R_\theta.R_\omega = R_{\theta+\omega}$. Desta forma, o conjunto

$$SO_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes define um grupo abeliano.

Observe que U_1 é isomorfo a SO_2 .

7. Grupo das Raízes Complexas da unidade.

Seja $\mathcal{R}_n = \{e^{\frac{i2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ munido com a operação de multiplicação de números complexos. Assim, (\mathcal{R}_n, \cdot) é um grupo abeliano.

8. Grupo de Rotações que preservam um polígono regular de n lados

$$\mathbb{Z}_n = \{I, R_{\frac{2\pi}{n}}, R_{\frac{4\pi}{n}}, \dots, R_{\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$$

9. Grupo de Reflexão sobre a reta determinada pelo eixo-x.

A transformação de reflexão sobre a reta do eixo-x é dada por $r_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$r_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_x^2 = I.$$

Assim, $R = \{I, r_x\}$, munido com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo.

10. Grupo Dedral do Triângulo.

Seja $\triangle ABC$ um triângulo equilátero. Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ \mathbb{E}^2 , uma simetria de $\triangle ABC$ se $T(\triangle) = \triangle$. Considere que o baricentro de $\triangle ABC$ encontra-se sobre a origem. Assim, é imediato que as rotações $R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}$ e $R_{\frac{6\pi}{3}} = I$ são simetrias. O conjunto $\{R_{\frac{6\pi}{3}} = I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$, munido com a multiplicação de matrizes é um grupo isomorfo a \mathbb{Z}_3 . Além disto, as reflexões $\{r_A, r_B, r_C\}$ sobre as bissetrizes do $\triangle ABC$ também preservam o triângulo, mas não formam um grupo. No entanto,

$$r_A \cdot r_B = r_B \cdot r_C = r_C \cdot r_A = R_{\frac{2\pi}{3}},$$

da onde concluímos que

$$D_3 = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, r_A, r_B, r_C\}$$

é um grupo, o grupo de simetrias do triângulo equilátero, também denominado de grupo diedral do triângulo.

11. Grupo Dedral do Quadrado.

Seja $\square ABCD$ um quadrado com centro na origem. Considere d_{AC} e d_{BD} as diagonais do quadrado. Sejam M, N, P, Q os pontos médios de cada um dos lados e l_{MP} e l_{NQ} as retas definidas pelos pares de pontos sobre lados opostos. Agora, considere as reflexões $\{r_{AC}, r_{BD}, r_{MP}, r_{NQ}\}$ sobre cada umas das retas construídas. Desta forma, o grupo diedral do quadrado é

$$D_4 = \{I, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi}, R_{\frac{3\pi}{2}}, r_{AC}, r_{BD}, r_{MP}, r_{NQ}\}$$

12. Grupo das Permutações, ou Grupo Simétrico

Considere o conjunto $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ e defina

$$S_n = \{f : I_n \rightarrow I_n \mid f \text{ é uma função bijetora}\}$$

Defina a operação de composição de funções sobre S_n , então S_n é um grupo. Segue que $S_3 \simeq D_3$, mas em geral temos que $D_n \subset S_n$. No caso $n = 4$, temos que o número de elementos de D_4 é 8, enquanto o de S_4 é 24.

13. Grupo Ortogonal de \mathbb{R}^3 .

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear que preserva o produto interno, isto é, $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$. Segue que,

$$\langle u, T^t \cdot T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \Rightarrow T^t \cdot T = I.$$

Tais transformações são denominadas transformações ortogonais e conjunto delas é denotado por O_3 . Se $T, Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são transformações ortogonais, segue das identidades

$$(T.Q)^t = Q^t.T^t, \quad (T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$$

que o produto delas e as inversas também são ortogonais. Assim, O_3 munido com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo. Devido ao fato que $T^t.T = I \Rightarrow |det(T)| = 1$, o grupo O_3 contém o subgrupo

$$SO_3 = \{T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid det(T) = 1\}. \quad (2.1)$$

denominado grupo de rotações de \mathbb{R}^3 .

Exercício 2.1. :

1. Mostre que os conjuntos acima, munidos com as operações descritas, são grupos.

2.1.1 Subgrupos

Definição 2.2. Seja (G, \cdot) um grupo, um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos $H < G$) quando, munido com a operação de G , (H, \cdot) é um grupo. Equivalentemente, se as condições abaixo são satisfeitas:

1. $\forall h_1, h_2, h_3$, temos que $h_1.(h_2.h_3) = (h_1.h_2).h_3$;
2. $\forall h_1, h_2 \in H$, temos que $h_1.h_2^{-1} \in H$

Exemplo 2.2. :

1. Dado um grupo G , $\{e\}$ e G são subgrupos (triviais);
2. $(n\mathbb{Z}, +)$ é um subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$;
3. $\{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}\}$ é um subgrupo de D_3
4. $\{I, R_\pi\}$ e $\{I, R_{\frac{\pi}{2}}, R_\pi, R_{\frac{3\pi}{2}}\}$ são subgrupos de D_4 .
5. Se $m = np$, então $D_n < D_m$;

Cada elemento $g \in G$ gera o subgrupo

$$\langle g \rangle = \{I, g, g^2, g^3, \dots, g^n, \dots\}.$$

Neste caso, dizemos que $\langle g \rangle$ é o grupo cíclico gerado por g .

Definição 2.3. Se $G = \langle g \rangle$, para algum $g \in G$, dizemos que G é um grupo cíclico.

O conceito de grupo cíclico pode ser estendido para um subconjunto $S \subset G$; sejam $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ e

$$\langle S \rangle = \{x_1.x_2.x_3 \dots x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in S \text{ ou } x_i^{-1} \in S\}$$

Dizemos que $\langle S \rangle$ é o subgrupo de G gerado por S . Caso $G = \langle S \rangle$, então G é gerado por S e os elementos de S são os geradores de G . Caso o conjunto S seja finito, o grupo G é dito ser finitamente gerado.

2.2 Plano Tangente

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto do \mathbb{R}^2 e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Para estudarmos a variação de f na vizinhança de um ponto $p \in U$ temos que fixar uma direção e calcular a derivada da função naquela direção; para isto procedemos da seguinte maneira: seja v o vetor que determina a direção e $\gamma(t) = p + tv$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, a reta tal que $\gamma(0) = p = (x_0, y_0)$ e $\gamma'(0) = v$. Seja $h(t) = f(\gamma(t))$ a função $h : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. A derivada direcional de h na direção de v é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{dh}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(0))}{t} \quad (2.1)$$

Em particular, as derivadas parciais de f são obtidas assim;

1. sejam $e_1 = (1, 0)$, $\gamma_1(t) = p + t(1, 0)$ e $h_1(t) = f(\gamma_1(t))$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{dh_1}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma_1(t)) - f(\gamma_1(0))}{t} = \quad (2.2)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_1) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (2.3)$$

2. Analogamente, se $e_2 = (0, 1)$, $\gamma_2(t) = p + t(0, 1)$ e $h_2(t) = f(\gamma_2(t))$;

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \frac{dh_2}{dt} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma_2(t)) - f(\gamma_2(0))}{t} = \quad (2.4)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_2) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (2.5)$$

Desta forma, para cada direção temos uma taxa de variação (derivada) para a função f . Além disto, de acordo com a definição, esta taxa de variação também depende da curva γ . Vejamos que, de fato, a taxa de variação independe de γ . Para este fim, precisamos do seguinte conceito:

Definição 2.4. Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, o plano tangente ao espaço \mathbb{R}^2 em p , denotado por $T_p\mathbb{R}^2$, é o conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^2$ tais que existe uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujas condições iniciais são $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, isto é,

$$T_p\mathbb{R}^2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}. \quad (2.6)$$

Para calcular a derivada de f , no ponto $p = (x_0, y_0)$ e na direção do vetor v , procedemos assim: considere uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t)) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) - f(x_0, y_0)}{t} = \quad (2.7)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) - f(x_0, \gamma_2(t))}{t} + \frac{f(x_0, \gamma_2(t)) - f(x_0, y_0)}{t} \right\} = \quad (2.8)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(c), \gamma_2(t)) \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(0)}{t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \gamma_2(d)) \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(0)}{t} \right\}, \quad (2.9)$$

onde $c, d \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $c \rightarrow 0$ e $d \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ (Teorema do Valor Intermediário). Portanto, no limite,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot v_2 \quad (2.10)$$

Exercício 2.2.

1. Mostre que $T_p\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial isomorfo ao espaço vetorial \mathbb{R}^2 .
2. Prove que $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é \mathbb{R} -linear na variável v .

Devido a linearidade da expressão 2.10, com relação à variável v , definimos o operador linear $df_p : T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$df_p \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(p). \quad (2.11)$$

Conseqüentemente, a derivada de f na direção v independe da curva γ ; depende apenas de p e de v . Assim, a derivada de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto $p \in U \subset \mathbb{R}^2$, é o funcional linear df_p .

Podemos aplicar o que foi visto para determinarmos a derivada de uma função $H : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$. Consideramos $H(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, então

$$dH_p \cdot v = (df_p \cdot v, dg_p \cdot v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot v_2, \frac{\partial g}{\partial x}(p) \cdot v_1 + \frac{\partial g}{\partial y}(p) \cdot v_2 \right) = \quad (2.12)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Portanto, a derivada da função H no ponto p é uma transformação linear $dH_p : T_pU \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde T_pU é isomorfo à \mathbb{R}^2 , como espaço vetorial.

2.3 Métricas Riemanniana

Na presente abordagem da geometria, a estrutura essencial é o de métrica riemanniana. Munidos com uma métrica, nós podemos determinar o comprimento de curvas e a área de regiões. Antes de dar a definição de uma métrica riemanniana vejamos como isto funciona em \mathbb{R}^2 .

Em \mathbb{R}^2 , o produto interno euclidiano é definido da seguinte maneira: sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$, então

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 \quad (2.1)$$

Desta forma, o produto interno acima define uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. (positividade) para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0.$$

2. (simetria) para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ temos que $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

3. (bilinearidade) Para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w \rangle = \lambda_1 \langle u, w \rangle + \lambda_2 \langle v, w \rangle$$

Definição 2.5. A norma induzida pelo produto interno em \mathbb{R}^2 é a função $|\cdot|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|u| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (2.2)$$

Ao fixarmos a base canônica em \mathbb{R}^2 obtemos a representação matricial

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Também temos que o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^2 é determinado pela relação

$$\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| \cos(\theta),$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$ é a medida do ângulo formado pelos vetores u e v . Portanto, o ângulo entre os vetores u e v é

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{|u| \cdot |v|}\right). \quad (2.4)$$

O ângulo é bem definido porque a função *coseno* é inversível no intervalo $[0, \pi]$.

Para determinarmos o comprimento de uma curva $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, façamos uma digressão ao cálculo. Seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável e

$$\mathcal{P}_n = \{a = t_0, \dots, t_k, \dots, t_n = b\}$$

uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que

$$\Delta t = t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad \xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

O comprimento aproximado de γ , restrita ao intervalo $[t_k, t_{k+1}]$, é dado pelo Teorema do Valor Intermediário por

$$\Delta s = |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| = |\gamma'(\xi_k)| \cdot \Delta t_k,$$

onde $|\gamma'(\xi_k)| = \sqrt{\langle \gamma'(\xi_k), \gamma'(\xi_k) \rangle}$. Desta forma, o comprimento da curva γ é dado por

$$L(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\gamma'(\xi_k)| \cdot \Delta t.$$

Segue da teoria de integração que

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Uma vez que $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^2$, o formalismo imbutido na expressão 2.2, nos induz a considerar situações na qual o produto interno depende do ponto, algo do tipo $\langle \cdot, \cdot \rangle_p: T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^2 \times T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 2.6. O comprimento de uma curva diferenciável $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt. \quad (2.5)$$

Vejamos como considerar produtos internos e normas mais gerais. Como o comprimento depende da norma utilizada, o seu valor dependerá da norma utilizada.

Uma matriz

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{tal que } g_{11} > 0, g_{22} > 0 \text{ e } \det(g) > 0,$$

define um produto interno através da expressão

$$g(u, v) = u^t \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} v = \langle u, g.v \rangle, \quad (2.6)$$

onde $\langle, \rangle =$ produto interno euclidiano.

Como G é simétrica, decorre que ela é diagonalizável. Devido à positividade, segue que os autovalores λ da matriz g são positivos, pois se $u \neq 0$ é um auto-vetor,

$$g.u = \lambda u \quad \Rightarrow \quad g(u, u) = \lambda \cdot |u|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0$$

Analogamente, associamos ao produto interno $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a norma $|\cdot|_g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $|u|_g = \sqrt{g(u, u)}$.

Proposição 2.2. (Desigualdade de Cauchy-Schwartz) *Seja g uma matriz simétrica positiva definida. Então, para todos u e v*

$$|g(u, v)| \leq |u|_g \cdot |v|_g$$

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Pelas propriedades de produto interno, temos que

$$g(u + tv, u + tv) = |u|_g^2 + 2tg(u, v) + t^2 |v|_g^2 \geq 0.$$

Para que a desigualdade seja verdadeira para todo $t \in \mathbb{R}$ é suficiente que o discriminante da inequação seja sempre negativo, isto é,

$$\Delta = [g(u, v)]^2 - |u|_g^2 |v|_g^2 \leq 0.$$

Consequentemente, $|g(u, v)| \leq |u|_g \cdot |v|_g$ □

Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwartz que

$$-1 \leq \frac{g(u, v)}{|u|_g \cdot |v|_g} \leq 1.$$

Como a função $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ é contínua e biunívoca, existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{g(u, v)}{|u|_g \cdot |v|_g}. \quad (2.7)$$

Desta maneira, o conceito de ângulo, assim como o de comprimento, decorre do conceito de métrica.

Definição 2.7. Uma métrica riemanniana sobre o \mathbb{R}^2 é uma aplicação que para cada $p \in \mathbb{R}^2$ associa um produto interno $g(p) : T_p\mathbb{R}^2 \times T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(u, v)_p = \langle u, g(p).v \rangle. \quad (2.8)$$

cuja dependência em relação à p é diferenciável.

Exemplo 2.3. Seja $p = (x, y)$;

1. métrica euclidiana

$$g_{(x,y)}(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2) \\ v &= (v_1, v_2) \end{aligned} \Rightarrow \langle u, v \rangle = u_1.v_1 + u_2.v_2$$

2. métrica hiperbólica.

$$g_{(x,y)}(u, v) = \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle, \quad g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Vejamos que no caso da métrica hiperbólica, o comprimento do vetor depende do ponto;

$$\text{ex: } p = (1, 10), \quad \begin{aligned} u &= (1, 1) \\ v &= (1, 0) \end{aligned} \Rightarrow g_{(1,10)}(u, v) = \frac{1}{100}$$

$$\text{ex: } p = (1, \frac{1}{10}), \quad \begin{aligned} u &= (1, 1) \\ v &= (1, 0) \end{aligned} \Rightarrow g_{(1, \frac{1}{10})}(u, v) = 100$$

3. métrica esférica.

$$g_{(\theta, \phi)}(u, v) = \text{sen}^2(\phi)u_1v_1 + u_2v_2, \quad g_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \text{sen}^2(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definição 2.8. Seja $g(p) : T_p\mathbb{R}^2 \times T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma métrica riemanniana.

1. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. O comprimento de γ , medido com a métrica g , é dado por

$$L(\gamma) = \int_0^1 g(\gamma'(t), \gamma'(t)) dt. \quad (2.9)$$

2. A área de uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, medida pela métrica g , é dada por

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(g)} dx dy. \quad (2.10)$$

Exemplo 2.4. Nos exemplos abaixo, considere a métrica hiperbólica sobre o \mathbb{R}^2 , vejamos o cálculo do comprimento ou da área em alguns casos;

1. Seja $\gamma : [\epsilon, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a reta dada por $\gamma(t) = (t, at)$. Assim, $\gamma'(t) = (1, a)$ e

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t))_{\gamma(t)} = \frac{1+a^2}{a^2} \cdot \frac{1}{t^2}$$

da onde temos que o comprimento é

$$L(\gamma) = \int_{\epsilon}^1 \frac{1+a^2}{a^2} \cdot \frac{dt}{t^2} = \frac{1+a^2}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

Assim, quanto mais próximo do eixo-x estiver o ponto $\gamma(\epsilon)$ maior será o comprimento de γ .

2. Consideremos o círculo com centro em (a, b) e raio R , sendo que $R < b$.

$$\gamma(\theta) = (R\cos(\theta) + a, R\sin(\theta) + b), \quad t_0 = 0 \text{ e } t_1 = 2\pi$$

$$\gamma'(t) = R(-\sin(\theta), \cos(\theta))$$

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{R \cdot d\theta}{b + R\sin(\theta)} = \frac{2\pi R}{\sqrt{b^2 - R^2}}.$$

Casos limite,

(a) $\lim_{b \rightarrow \infty} L(\gamma) = 0;$

(b) $R = \epsilon \cdot b$, onde $0 < \epsilon < 1$. Então,

$$L(\gamma) = 2\pi \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} L(\gamma) = 0;$$

(c) $b = 0 \Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{\pi} \operatorname{cosec}(\theta) d\theta = \infty.$

3. O elemento de área associado a métrica hiperbólica é

$$dA = \sqrt{\det(g)} = \frac{1}{y^2} dx dy.$$

Portanto, a área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é

$$A(\Omega) = \int \int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy$$

Sejam α e β ângulos fixos. Considere a região (gomo hiperbólico)

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid R \cdot \cos(\pi - \alpha) \leq x \leq R \cdot \cos(\beta), \quad \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} \leq y \leq \infty\},$$

$$A(\Omega_{\alpha\beta}) = \int_{R \cdot \cos(\pi - \alpha)}^{R \cdot \cos(\beta)} \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$\int_{R.\cos(\pi-\alpha)}^{R.\cos(\beta)} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = -\arccos \frac{x}{R} \Big|_{R.\cos(\pi-\alpha)}^{R.\cos(\beta)} = \pi - (\alpha + \beta).$$

Definição 2.9. Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$ e $\Omega(p, q) = \{\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \delta(0) = p, \delta(1) = q\}$ o espaço das curvas contínuas ligando p à q . Uma geodésica ligando p a q é uma curva $\gamma \in \Omega(p, q)$ tal que

$$L(\gamma) = \min_{\delta \in \Omega(p, q)} L(\delta) \quad (2.11)$$

Em \mathbb{R}^2 , se considerarmos a métrica euclideana, dados os pontos p e q sabemos que existe uma reta ligando-os e cujo comprimento define a distância de p à q . A partir de agora, o conceito de reta será substituído pelo de geodésica enquanto o de distância será o seguinte;

Definição 2.10. A função distância $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$d(p, q) = \min_{\delta \in \Omega(p, q)} L(\delta) \quad (2.12)$$

Em decorrência da definição, a função distância satisfaz as seguintes propriedades;

1. (positividade) $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$.
2. (simetria) $d(p, q) = d(q, p)$.
3. (desigualdade triangular) Para quaisquer p, q e r em \mathbb{R}^2 ,

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q).$$

A função distância nos permite definir os conjuntos

$$B_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, q) < \epsilon\},$$

os quais formam uma base para a topologia de \mathbb{R}^2 .

A métrica hiperbólica não está bem definida para os pontos pertencentes ao eixo- x ($y = 0$). Este tipo de situação implica em dificuldades técnicas, como por exemplo no cálculo de distâncias. Desta maneira, considere a seguinte definição

Definição 2.11. Uma métrica é completa sobre uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se para quaisquer par de pontos $x, y \in \Omega$ existe uma geodésica ligando p à q e a distância $d(p, q)$ é finita.

No que se segue, estaremos sempre trabalhando com métricas completas e, por isto, faremos menção apenas ao termo métrica.

2.3.1 Grupo de Isometria

No estudo da geometria, as transformações do espaço que preservam a distância são fundamentais e fazem parte da análise. Tais transformações denominamos de *isometrias*;

Definição 2.12. .

1. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto de \mathbb{R}^2 e g uma métrica definida sobre Ω . Uma isometria é um difeomorfismo $f : \Omega \rightarrow \Omega$ tal que para todo $x \in \Omega$ e $u, v \in T_x\Omega$

$$g(df_x.u, df_x.v)_{f(x)} = g(u, v)_x \quad (f^*g = g) \quad (2.13)$$

2. O Grupo de Isometria de (Ω, g) é o conjunto

$$Isom_g(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega \mid f \in Dif(\Omega), f^*g = g\} \quad (2.14)$$

Exemplo 2.5. Considere a aplicação definida pela rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $(dR_\theta)_x : T_x\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{R_\theta(x)}\mathbb{R}^2$ é dada por $(dR_\theta)_x = R_\theta$. Como a métrica é a euclidiana, segue que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $u, v \in T_x\mathbb{R}^2$,

$$g_x((dR_\theta)_x.u, (dR_\theta)_x.v) = \langle R_\theta.u, R_\theta.v \rangle = \langle u, v \rangle = g(u, v).$$

Comentário 1. Considerando que *geometria* significa medir a terra, na presente seção vimos que para medirmos precisamos da terra (espaço) e do conceito de medição (métrica). Portanto, geometria significa um par (Ω, g) , onde Ω é um espaço e g é uma métrica riemanniana definida sobre Ω .

Numa geometria (Ω, g) , o conceito de reta é estendido para o conceito de geodésica. Portanto, as implicações dos Axiomas de Euclides não poderão mais serem consideradas. Por exemplo, o Axioma das Paralelas será modificado de acordo com a natureza das geodésicas da métrica utilizada. Veremos que, na geometria esférica, por um ponto p não pertencente a uma geodésica l não passa nenhuma geodésica paralela à l , enquanto na geometria hiperbólica passam infinitas.

Capítulo 3

Geometria Euclideana

O objetivo é estudar a Geometria Euclideana a partir dos seguintes elementos primitivos: o espaço topológico \mathbb{R}^2 e a métrica euclidiana $g = \langle, \rangle$.

Definição 3.1. O espaço euclidiano \mathbb{E}^2 é o espaço \mathbb{R}^2 munido com a métrica euclidiana;

$$\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

No Capítulo I, mencionamos que o conceito de reta é substituído pelo conceito de geodésica. Portanto, na presente abordagem, devemos demonstrar que uma geodésica em \mathbb{E}^2 , de fato, é uma reta.

3.1 Geodésicas em \mathbb{E}^2

Para determinarmos as geodésicas em \mathbb{E}^2 utilizaremos dois métodos distintos. O 1º-método é mais simples enquanto o 2º será apresentado na última seção deste capítulo como uma forma de entender a questão de um ponto de vista *global*. No 2º método surge a curvatura da curva que, juntamente com o comprimento, são os principais invariantes geométricos (independem da parametrização) de uma curva.

Na Geometria Analítica, aprendemos que a distância entre os pontos p e q em \mathbb{R}^2 é dada pelo comprimento da reta que une estes pontos. Se $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$, a distância é

$$|q - p| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}. \quad (3.1)$$

A distância acima não utiliza a parametrização da reta uma vez que segue dos axiomas de Euclides que a menor distância entre dois pontos é dada pela medida do único segmento de reta que une os pontos, e, pelo Teorema de Pitágoras, esta medida é obtida pela expressão 3.1.

Seja

$$\Omega(p, q) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2 \mid \gamma \in C^0, \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

o espaço das curvas contínuas ligando p à q em \mathbb{E}^2 . A integral do comprimento de uma curva define a função

$$L : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

Desta maneira, a distância entre os pontos p e q em \mathbb{E}^2 é dada por

$$d_{\mathbb{E}^2}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p, q)} L(\gamma).$$

Uma propriedade simplificadora no estudo de \mathbb{E}^2 é a de que \mathbb{E}^2 é um espaço vetorial. Isto nos permite utilizar as técnicas da Álgebra Linear para chegarmos aos resultados. A reta $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$, ligando p à q , é parametrizada por

$$r(t) = p + t(q - p),$$

e,

$$L(r) = |q - p|.$$

Proposição 3.1. *Sejam p e q pontos em \mathbb{E}^2 . A geodésica ligando p à q descreve uma reta. Além disso,*

$$d_{\mathbb{E}^2}(p, q) = |q - p|. \quad (3.2)$$

Demonstração. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva ligando $p = \alpha(0)$ à $q = \alpha(1)$. Assim,

$$q - p = \int_0^1 \alpha'(t) dt.$$

Seja $v \in \mathbb{E}^2$ um vetor unitário qualquer. Desta forma,

$$\langle q - p, v \rangle \leq \int_0^1 \langle \alpha'(t), v \rangle dt \leq \int_0^1 |\alpha'(t)| dt.$$

e, conseqüentemente,

$$\langle |q - p|, v \rangle \leq \int_0^1 |\alpha'(t)| dt.$$

Se tomarmos $v = \frac{q-p}{|q-p|}$, segue que

$$|q - p| \leq L(\alpha) \quad \Rightarrow \quad |q - p| \leq d_{\mathbb{E}^2}(p, q)$$

Portanto, o comprimento da reta ligando p à q é menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva ligando estes pontos, da onde concluímos que a reta é a geodésica e $d_{\mathbb{E}^2}(p, q) = |p - q|$. \square

Teorema 3.1. *Sejam $p, q \in \mathbb{E}^2$. Então, existe uma única geodésica, parametrizada pelo comprimento de arco, ligando p à q .*

3.2 Isometrias de \mathbb{E}^2

Com o intuito de descrever o grupo $Isom(\mathbb{E}^2)$, vamos primeiramente estudar as isometrias mais simples de \mathbb{E}^2 .

Definição 3.2. Uma rotação de ângulo θ com centro na origem é uma transformação linear $R_\theta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ que satisfaz as seguintes propriedades; para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{E}^2$

$$\langle R_\theta.u, R_\theta.v \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \det(R_\theta) = 1$$

Observação. Decorrem da definição as seguintes propriedades de uma rotação:

1. $R_\theta(0) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
2. $R_\theta \cdot R_\theta^t = R_\theta^t \cdot R_\theta = I$,
3. Em relação a base canônica $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 , a matriz que representa R_θ é

$$[R_\theta]_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Não havendo possibilidade de mal entendido, denotaremos $R_\theta = [R_\theta]_\beta$.

Proposição 3.2. *Sejam R_θ e R_ϕ rotações, então:*

1. $R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}$.
2. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

Corolário 3.1. *Seja $SO_2 = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ o conjunto das rotações em \mathbb{E}^2 . Então, SO_2 é um grupo abeliano.*

Proposição 3.3. *Se $R_\theta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma rotação, então R_θ é uma isometria de \mathbb{E}^2 .*

Demonstração.

$$R_\theta(x, y) = (\cos\theta \cdot x + \text{sen}\theta \cdot y, -\text{sen}\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y)$$

Portanto, $(dR_\theta)_{(x,y)} : T_{(x,y)}\mathbb{E}^2 \rightarrow T_{R_\theta(x,y)}$ é dada por

$$(dR_\theta)_{(x,y)} \cdot v = R_\theta \cdot v$$

da onde temos que

$$\langle (dR_\theta)_{(x,y)} \cdot v, (dR_\theta)_{(x,y)} \cdot u \rangle = \langle R_\theta \cdot v, R_\theta \cdot u \rangle = \langle u, v \rangle$$

□

Para introduzirmos as transformações de reflexão sobre uma reta, inicialmente vamos considerar a reflexão sobre o eixo-x definida por

$$r_x(x, y) = (x, -y)$$

Desta forma, $r_x : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma transformação linear tal que $r_x^2 = id_{\mathbb{E}^2}$, cuja matriz, em relação a base canônica, é dada por

$$[r_x]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$,

$$R_\theta r_x = r_x R_{-\theta}. \tag{3.1}$$

Definição 3.3. Seja $l \subset \mathbb{E}^2$ uma reta passando pela origem cuja inclinação (medida em relação ao eixo-x, no sentido anti-horário) mede θ . Uma reflexão em relação a l é a transformação linear $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definida por

$$r_l = R_\theta \circ r_x \circ R_\theta^{-1}$$

Segue da identidade 3.1 que

$$r_l = R_\theta \cdot r_x \cdot R_{-\theta} = R_{2\theta} \cdot r_x$$

Exemplo 3.1. :

1. Reflexão sobre o eixo y.

$r_x(x, y) = (-x, y)$. Portanto, em relação a base canônica temos que

$$[r_y]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Reflexão em relação a reta $l = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y = \tan(\theta)x\}$.

Se θ é a inclinação de l com respeito ao eixo-x, então decorre da definição $r_l = R_\theta \circ r_x \circ R_\theta^{-1} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ que a matriz de r_l , na base canônica, é

$$[r_l]_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

3. Em função do coeficiente angular de $y = ax$ a reflexão do item anterior é

$$r_l = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -1+a^2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Proposição 3.4. *Seja l uma reta passando pela origem em \mathbb{E}^2 . Então;*

1. Se $p \in l$, então $r_l(p) = p$.
2. $r_l^2 = id_{\mathbb{E}^2}$
3. $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ satisfaz $r_l^t \cdot r_l = r_l \cdot r_l^t = I$, ou equivalentemente;

$$\langle r_l \cdot u, r_l \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{E}^2$$

4. $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma isometria.

Exercício 3.1. Prove a proposição anterior.

Proposição 3.5. *Sejam l, r retas em \mathbb{E}^2 que passam pela origem e formam ângulos α, β , respectivamente, com o eixo-x. Então,*

$$r_l \circ r_r = R_{2(\alpha-\beta)}, \quad r_r \circ r_l = R_{-2(\alpha-\beta)}$$

Demonstração. De acordo com 3.2, temos que

$$r_l(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \text{sen}(2\alpha) \\ \text{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r_s(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \text{sen}(2\beta) \\ \text{sen}(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Desta forma,

$$r_l \circ r_s(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\text{sen} 2(\alpha - \beta) \\ \text{sen} 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r_s \circ r_l(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 2(\beta - \alpha) & -\text{sen} 2(\beta - \alpha) \\ \text{sen} 2(\beta - \alpha) & \cos 2(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

□

Definição 3.4. O grupo ortogonal é o conjunto

$$O_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.A^t = A^t.A = I\}$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes.

O grupo O_2 age sobre \mathbb{E}^2 e a ação tem um único ponto fixo (a origem).

Exercício 3.2. :

1. Mostre que O_2 é um grupo e que SO_2 é um subgrupo de O_2 (subgrupo das rotações).
2. Seja D_n o grupo diedral do polígono regular de n lados. Mostre que se l, s são retas passando pela origem que formam um ângulo $\frac{\pi}{n}$ entre si, então

$$D_n \simeq \langle r_l, r_s \rangle. \quad (3.4)$$

Proposição 3.6. O grupo O_2 é gerado por reflexões.

Demonstração. Seja $A \in O_2$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Segue de $A^t.A = I$ que

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ ac + bd = 0 & (2) \\ c^2 + d^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

A equação (2) implica que $ac = -bd$. Vamos considerar os seguintes casos;

1. $c=0$;
então $d=1$ ou $d=-1$, e em ambos os casos $b=0$, da onde $a = 1$ ou $a = -1$. Portanto, A será igual a uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $d=0$;
então $c=1$ ou $c=-1$, e em ambos os casos $a=0$, da onde $b=1$ ou $b=-1$. Portanto, A será igual a uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $a=0$ ou $b=0$;
estes casos resultam nas mesmas matrizes obtidas nos itens anteriores.
4. $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
então $c = -\frac{bd}{a}$, o que substituindo na equação (3) resulta em $|d| = |a|$. Conseqüentemente, há duas possibilidades

$$d = a \Rightarrow c = -b, \quad d = -a \Rightarrow c = b$$

Assim, neste caso teremos que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos\theta$ e $b = -\sin\theta$, então as equações são satisfeitas. O ângulo θ sempre existe porque as funções *coseno* e *seno* são contínuas. Assim, temos que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto, ou A é uma matriz de rotação R_θ ou é o produto de uma rotação seguida por uma reflexão. Na proposição 3.5 vimos que as rotações são produtos de reflexões, da onde concluímos que O_2 é gerado por reflexões. \square

Exercício 3.3. :

1. Sejam R_ϕ uma rotação e r_l uma reflexão sobre uma reta l passando pela origem. Suponha que l forma um ângulo ϕ com o eixo- x . Mostre que $R_\phi \circ r_l$ é uma reflexão ao longo de uma reta t e determine t .
2. Conclua que O_2 não é um grupo abeliano.
3. Nos casos tratados na demonstração do teorema acima, diga qual o significado geométrico para as transformações que surgem nos casos $c = 0$ e $d = 0$.

Definição 3.5. Seja $b \in \mathbb{R}^2$. Uma translação é uma transformação $T_b : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definida por

$$T_b(x) = x + b, \quad b = T(0). \quad (3.5)$$

Proposição 3.7. As translações satisfazem as seguintes propriedades;

1. Se $b \neq 0$ então as transformações $T_b : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ não são lineares.
2. Se $b \neq 0$, então para todo $x \in \mathbb{E}^2$ $T_b(x) \neq x$.

3. Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{E}^2$, então

$$T_{b_1} \circ T_{b_2} = T_{b_2} \circ T_{b_1} = T_{b_1+b_2}.$$

4. Para todo $b \in \mathbb{E}^2$, $T_b^{-1} = T_{-b}$.

5. o conjunto

$$\mathcal{T} = \{T_b \mid b \in \mathbb{E}^2\}$$

munido com a operação de composição é um grupo abeliano isomorfo a \mathbb{R}^2 .

6. \mathcal{T} age em \mathbb{E}^2 sem pontos fixos.

7. Para todo $b \in \mathbb{E}^2$, $T_b : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é uma isometria.

Demonstração. .

1. Veja que $T_b(x + y) = x + y + b \neq (x + b) + (y + b) = T_b(x) + T_b(y)$.

2. $T_b(x) = x \Leftrightarrow x + b = x \Leftrightarrow b = 0$.

3. $T_{b_1} \circ T_{b_2}(x) = T_{b_1}(x + b_2) = x + b_2 + b_1$.

4. $T_b \circ T_{-b}(x) = T_{b-b}(x) = T_0(x) = x$, ou seja $T_b \circ T_{-b} = id_{\mathbb{E}^2}$.

5. Pelos itens anteriores, segue que (\mathcal{T}) é um grupo abeliano. A aplicação $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(T_b) = b$ define um isomorfismo entre grupos. Além disto, segue que \mathcal{T} age sobre \mathbb{E}^2 através da ação $\mathcal{T} \times \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ definida por $(T_b, x) \rightarrow T_b(x)$.

6. Seja $T_b \in \mathcal{T}$, então $T_b(x) = x + b$. Portanto, $dT_b|_x \cdot v = v$ implica que T_b é uma isometria de \mathbb{E}^2 .

□

Uma vez que a composição de isometrias é uma isometria, vamos considerar para todo $A \in O_2$ e $b \in \mathbb{E}^2$ a isometria

$$T_{A,b} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2, \quad T_{A,b}(u) = Au + b. \quad (3.6)$$

Exercício 3.4. :

1. Reflexão sobre uma reta $l \subset \mathbb{E}^2$

Seja $l \subset \mathbb{E}^2$ uma reta definida pela equação $y = ax + b$. Mostre que a reflexão em relação a l é dada pela transformação $r_l : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$r_l(x, y) = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -1+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{2b}{1+a^2}(-a, 1). \quad (3.7)$$

2. Se $l = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y = tg(\theta)x - atg(\theta)\}$ é a reta com inclinação θ passando pelo ponto $(a, 0)$, então

$$r_l(u) = r_x R_{-2\theta}(u) - \frac{2a \cdot tg(\theta)}{1+tg^2(\theta)}(-tg(\theta), 1) \Rightarrow r_l = T_{r_x R_{2\theta}, b(\theta, a)}. \quad (3.8)$$

3. Nos itens anteriores obtenha a expressão para a reflexão ao longo dos eixos e das reta $y = \alpha$, onde α é constante.(no caso do eixo-y, considere o caso $a \rightarrow \infty$).

4. Rotação com centro em P

Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{E}^2$. Seja $R_\theta^{P_0} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma rotação de centro em P_0 e ângulo θ . Considere $v_0 = OP_0$ e mostre que

$$R_\theta^{P_0}(u) = R_\theta(u) + v_0 - R_\theta(v_0) \quad \Rightarrow \quad R_\theta^{P_0} = T_{R_\theta, v_0 - R_\theta(v_0)}. \quad (3.9)$$

5. Seja l uma reta qualquer em \mathbb{E}^2 e $\alpha \in \mathbb{R}$ uma constante. Mostre que existe uma isometria $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tal que a imagem de l é a reta $t = \{(\alpha, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

Proposição 3.8. *Sejam l, s retas em \mathbb{E}^2 e r_l, r_s as respectivas reflexões. Então,*

1. *Se $l \parallel s$, então $r_l \circ r_s = T_b$ e $r_s \circ r_l = T_{-b}$, onde $b \in \mathbb{E}^2$ é um vetor ortogonal a l, s e $|b| = 2 \text{dist}(l, s)$*
2. *Se l, s são concorrentes, então $r_l \circ r_s = R_{2\theta}$ e $r_s \circ r_l = R_{2\theta}$, onde $\theta \in \mathbb{R}$ é o ângulo formado por l e s .*

Demonstração. 1. Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$l = \{(\alpha, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad s = \{(\beta, y) \in \mathbb{E}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

onde α, β são constantes. Assim, sejam $u_0 = (\alpha, 0)$ e $v_0 = (\beta, 0)$. Segue que as reflexões $r_l, r_s : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ são dadas por

$$r_l(u) = r_y(u) + 2u_0, \quad r_s(u) = r_y(u) + 2v_0. \quad (3.10)$$

Portanto, uma vez que $r_y(u_0) = -u_0$ e $r_y(v_0) = -v_0$, a composição é

$$r_l \circ r_s(u) = u + 2(u_0 - v_0) \quad (3.11)$$

$$r_s \circ r_l(u) = u + 2(v_0 - u_0) \quad (3.12)$$

2. Sem perda de generalidade, podemos assumir que l e s são concorrentes na origem. Suponha que l forma um ângulo α com o eixo- x e s forma um ângulo β com o eixo- x . Assim, $\theta = \alpha - \beta$ e a afirmação decorre da proposição 3.5. □

Teorema 3.2. *Seja $T : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma isometria. Então, existem $A \in O_2$ e $b \in \mathbb{E}^2$ tais que, para todo $x \in \mathbb{E}^2$*

$$T(x) = Ax + b \quad (T = T_{A,b})$$

Demonstração. Seja $p = (x, y) \in \mathbb{E}^2$. Por definição, $\langle dT_p \cdot u, dT_p \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$, e portanto, dT_p é ortogonal. Pela proposição 3.6 existe uma matrix ortogonal A tal que $[dT_p]_\beta = A(p)$, onde A depende de p . Ainda de 3.6, segue que existe $\theta(x, y) \in \mathbb{R}$ tal que $A(x, y) = R_{\theta(x,y)}$ ou $A(x, y) = R_{\theta(x,y)} \circ r_x$. Vamos tratar do 1º-caso, uma vez que o 2º segue de forma análoga. Suponha que $\theta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ é não constante e que existem funções diferenciáveis $f, g : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ tais que $T(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Assim,

$$dT_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

No entanto, se $dT_{(x,y)} = R_\theta$ segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \cos\theta(x, y)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} = \sin\theta(x, y).$$

A identidade $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ implica que

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \sin\theta(x, y) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos\theta(x, y)$$

Analogamente, segue de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$, que

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \cos\theta(x, y) = -\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin\theta(x, y)$$

Se assumirmos que θ não é constante podemos dividir as expressões acima para obtermos

$$\frac{\frac{\partial \theta}{\partial y}}{-\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial y}} \Rightarrow |\nabla \theta|^2 = 0 \Rightarrow \nabla \theta = 0$$

Ou seja, concluímos que θ é constante. Neste caso, ao integrarmos $dT_p = R_\theta$ obtemos

$$T(x) = R_\theta \cdot x + b, \quad b = T(0)$$

Se aplicarmos os mesmos procedimentos para o caso $A = R_\theta \circ r_x$, concluímos que

$$T(x) = (R_\theta \circ r_x) \cdot x + b, \quad b = T(0).$$

□

Definição 3.6. A isometria $T_{A,b}$

1. preserva orientação se $\det(A) = 1$.
2. inverte orientação se $\det(A) = -1$.

Lema 3.1. Seja l uma reta e $T_{A,b} \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$. Então, $T_{A,b}(l)$ é uma reta.

Demonstração. Sejam $p, q \in l$. Desde que l minimiza a distância entre p e q , vamos considerá-la parametrizada por $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$ (p/ comprimento de arco)

$$\gamma(s) = s \frac{q - p}{|q - p|} + p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_{A,b}(\gamma(s)) &= s \frac{1}{|q - p|} A(q - p) + Ap + b = s \frac{1}{|q - p|} (Aq + b - Ap - b) + Ap + b = \\ &= s \frac{T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)}{|q - p|} + T_{A,b}(p) \end{aligned}$$

Uma vez que $|T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)| = |q - p|$, segue que

$$T_{A,b}(\gamma(s)) = s \frac{T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)}{|T_{A,b}(q) - T_{A,b}(p)|} + T_{A,b}(p)$$

Portanto, $T_{A,b}(\gamma)$ é a parametrização, por comprimento de arco, da reta que minimiza a distância entre $T_{A,b}(q)$ e $T_{A,b}(p)$. □

Lema 3.2. *Seja $f : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma isometria tal que no ponto p satisfaz $f(p) = p$ e $df_p = I$. Então, $f = id_{\mathbb{E}^2}$.*

Demonstração. Decorre do lema anterior que a imagem da reta $\gamma(s) = s \frac{q-p}{|q-p|} + p$ é

$$f(\gamma(s)) = s \frac{f(q) - f(p)}{|f(q) - f(p)|} + f(p).$$

Pela hipótese,

$$\frac{d(f(\gamma))}{ds} \Big|_{s=0} = df_p \cdot \frac{q-p}{|q-p|} = \frac{q-p}{|q-p|}.$$

Portanto,

$$\frac{f(q) - f(p)}{|f(q) - f(p)|} = \frac{q-p}{|q-p|}.$$

Como $f(p) = p$ e $|f(q) - f(p)| = |q - p|$, segue que $f(q) = q$ para todo $q \in \mathbb{E}^2$. □

Observação. O lema acima, decorre do fato para cada ponto $p \in \mathbb{E}^2$ e $v \in T_p \mathbb{E}^2$, existe uma única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v \in T_p \mathbb{E}^2$. Como as geodésicas ligando os pontos p, q e $f(p) = p, f(q)$ tem as mesmas condições iniciais e levam os mesmo “tempo” para chegarem à q e à $f(q)$, segue que $f(q) = q$.

Definição 3.7. Sejam A, B e C pontos não colineares em \mathbb{E}^2 . Um triângulo euclidiano $\triangle(A, B, C)$ é formado pelas 3 retas definidas pelos pontos A, B e C .

O seguinte axiomas de Euclides apresenta as condições suficientes para que 2 triângulos sejam congruentes;

Axioma 3.1. Congruência (LLL) *Dois triângulos quaisquer são congruentes se tiverem os 3 lados congruentes.*

Na presente formulação da geometria euclidiana o conceito de isometria substitui o de congruência. O seguinte resultado é equivalente ao axioma acima;

Proposição 3.9. *Sejam A, B e C pontos não colineares em \mathbb{E}^2 . Qualquer isometria $f \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ é determinada pelas imagens $f(A), f(B)$ e $f(C)$.*

Demonstração. Considere em \mathbb{E}^2 a estrutura de espaço vetorial induzida pelo \mathbb{R}^2 de tal forma que a origem esta em A e o eixo-x esta definido pela reta ligando A a B . O eixo-y é determinado pela única reta perpendicular ao eixo-x. Sejam $P_B = (x_B, y_B)$ e $P_C = (x_C, y_C)$ as coordenadas de B e C em \mathbb{R}^2 . Decorre da hipótese que os vetores $v_B = \overrightarrow{OP_B}$ e $v_C = \overrightarrow{OP_C}$ são linearmente independentes. Por isto, para qualquer ponto $P \in \mathbb{E}^2$, representado pelo vetor $v = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^2$

existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_B + \beta v_C$. Seja $f = T_{A,b}$, onde $A \in O_2$ e $b = f(0)$. Então, $f(0) = b$ e

$$f(v) = Av + b = \alpha f(v_B) + \beta f(v_C) + f(0)$$

Portanto, f é determinada pela imagem dos vetores $0, v_B$ e v_C . \square

Exercício 3.5. :

1. Enuncie e prove o caso (LAL) de congruência de triângulos.
2. Enuncie e prove o caso (ALA) de congruência de triângulos.
3. Sejam $A, B \in \mathbb{E}^2$ dois pontos quaisquer e l a reta definida por eles. Mostre que o conjunto dos pontos equidistantes de A e B é uma reta ortogonal a l .

3.3 Relações Métricas em \mathbb{E}^2

Três pontos A, B e C não colineares em \mathbb{E}^2 definem um único triângulo $\triangle ABC$. Associado a cada um dos vértices A, B e C temos os ângulos internos medindo α, β e γ , respectivamente. Se a, b e c forem os comprimentos dos lados opostos aos vértices A, B e C , respectivamente, então as relações métricas em $\triangle ABC$ são as seguintes;

1. Lei dos Cossenos,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\alpha) \quad (3.1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\beta), \quad (3.2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\gamma). \quad (3.3)$$

Em particular, se o ângulo $\alpha = \pi/2$, temos o Teorema de Pitágoras;

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3.4)$$

2. Lei dos Senos,

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}. \quad (3.5)$$

De acordo com os critérios de congruência da geometria plana (LLL , LAL e ALA), os ângulos internos não determinam a classe de congruência de um triângulos, apenas a de semelhança. Assim, a área de um triângulo euclidiano pode ser determinada em função dos lados apenas, através da fórmula

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}. \quad (3.6)$$

Capítulo 4

Geometria Esférica

4.1 Métrica Esférica

4.1.1 A superfície S^2

Neste capítulo, consideraremos o espaço euclidiano como sendo o par $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é o produto interno euclidiano.

A esfera de raio R_0 em \mathbb{R}^3 é o conjunto

$$S^2(R_0) = \{v \in \mathbb{R}^3; |v| = R_0\}. \quad (4.1)$$

Se considerarmos a função $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, então $S^2 = h^{-1}(R_0)$ é uma superfície de nível, e devido a isto, o plano tangente no ponto $p \in S^2$ é

$$T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, \vec{op} \rangle = 0\}. \quad (4.2)$$

$S^2(R_0)$ é um espaço compacto para todo $R_0 \in \mathbb{R}$, uma vez que é fechado e limitado. Ao longo do texto, estaremos considerando $\mathbb{S}^2 = S^2(1)$. Assim, se $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, então uma base para o plano tangente $T_p \mathbb{S}^2$ é dada por

$$\beta = \left\{ e_1 = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right), \quad e_2 = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \right\} \quad (4.3)$$

Definição 4.1. A métrica esférica g_s definida sobre \mathbb{S}^2 é a métrica induzida pela métrica euclidiana de \mathbb{E}^3 através do mergulho de \mathbb{S}^2 em \mathbb{R}^3 . Localmente, g_s é obtida assim; sejam (U, ϕ) uma carta de \mathbb{S}^2 , $q \in B_1$ e $p = \phi(q) \in \mathbb{S}^2$, e sejam $\hat{u} = d\phi_q.u$ e $\hat{v} = d\phi_q.v$ vetores tangentes pertencentes à $T_p \mathbb{S}^2$, então

$$g(\hat{u}, \hat{v})_p = \langle d\phi_q.u, d\phi_q.v \rangle, \quad (4.4)$$

Desta maneira, supondo que a carta considerada é (U, ϕ_1) , temos que

$$\begin{cases} g_{11} = \langle e_1, e_1 \rangle = \frac{1-y^2}{1-x^2-y^2}, \\ g_{12} = \langle e_1, e_2 \rangle = \frac{xy}{1-x^2-y^2}, \\ g_{22} = \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{1-x^2}{1-x^2-y^2}. \end{cases} \Rightarrow g_s = \begin{pmatrix} \frac{1-y^2}{1-x^2-y^2} & \frac{xy}{1-x^2-y^2} \\ \frac{xy}{1-x^2-y^2} & \frac{1-x^2}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

4.1.2 Coordenadas Esféricas

A maneira mais natural de descrevermos os pontos do espaço é associarmos a cada ponto $p \in \mathbb{R}^3$ uma tripla (x, y, z) , denominadas de coordenadas cartesianas de p . No entanto, nem sempre este é o melhor sistema de coordenadas para se estudar um determinado problema. Ao tratarmos de problemas sobre uma esfera $S^2(R_0)$ é mais natural associarmos a cada ponto $p = (x, y, z)$ do espaço uma tripla (ρ, θ, ψ) , onde

$$\begin{aligned} \rho & \text{ mede a distância de } p \text{ à origem,} \\ \theta & \text{ é o ângulo, medido em radianos, entre a projeção do vetor } \vec{op} \text{ sobre o plano-xy e o eixo-x,} \\ \psi & \text{ é o ângulo, medido em radianos, entre o vetor } \vec{op} \text{ e o eixo-z.} \end{aligned} \tag{4.6}$$

O ângulo θ é denominada a longitude de p , enquanto o ângulo ψ a latitude de p . Desta maneira, temos que

$$x = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\psi), \quad y = \rho \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\psi) \quad \text{e} \quad z = \rho \cdot \cos(\psi). \tag{4.7}$$

Isto define a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(\rho, \theta, \psi) = (\rho \cdot \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\psi), \rho \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\psi), \rho \cdot \cos(\psi)),$$

Um sistema de coordenadas esféricas em \mathbb{R}^3 é um sistema ortogonal de coordenadas (ρ, θ, ψ) e uma aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, para qualquer constante positiva $R_0 \in \mathbb{R}$, $F(R_0, \theta, \psi)$ descreve a esfera de raio R_0

$$S^2(R_0) = \{F(R_0, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3 \mid (\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\}.$$

Desta forma, a descrição da esfera $S^2(R_0)$ em coordenadas esféricas é mais simples uma vez que $\rho = R_0$ é constante. Porém, para que F defina uma mudança de coordenadas devemos restringi-la, de modo a obter um difeomorfismo, à $F : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Exercício 4.1. .

1. Mostre que o comprimento de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, calculado em coordenadas esféricas, é

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 \text{sen}^2(\psi) (\theta')^2 + \rho^2 (\psi')^2} dt. \tag{4.8}$$

Determine $L(\gamma)$ quando $\gamma \subset S^2(R_0)$.

2. Mostre que o volume de uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, descrito em coordenadas esféricas, é

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} \rho^2 \text{sen}(\psi) d\rho d\theta d\psi. \tag{4.9}$$

3. Seja $p \in \mathbb{S}^2$. Determine uma base ortogonal para $T_p \mathbb{S}^2$ e mostre que, utilizando as coordenadas esféricas (ρ, θ, ψ) , a métrica esférica sobre \mathbb{S}^2 é localmente descrita por

$$\begin{cases} g_{11} = \text{sen}(\psi), \\ g_{12} = g_{21} = 0 \\ g_{22} = 1 \end{cases} \Rightarrow g_s = \begin{pmatrix} \text{sen}(\psi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

4. Mostre que a área de uma região $\Lambda \subset S^2(R_0)$, descrito em coordenadas esféricas, é dada por

$$A(\Lambda) = \int_{\hat{\Lambda}} R_0^2 \cdot \text{sen}^2(\psi) d\theta d\psi, \quad (4.11)$$

onde $\hat{\Lambda}$ é a pré-imagem de Λ por alguma carta, e calcule a área de $S^2(R_0)$.

Definição 4.2. O Espaço Esférico é o par (\mathbb{S}^2, g_s) , onde g_s é a métrica esférica induzida pela métrica euclidiana de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{S}^2 .

A geometria esférica estuda as propriedades métricas da superfície riemanniana

$$\mathbb{S}^2 = (S^2, g_s). \quad (4.12)$$

4.2 Isometrias de \mathbb{S}^2

Ao visarmos a classificação das isometrias de \mathbb{S}^2 , primeiramente, observamos que o conjunto das transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preservam o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^3 , isto é,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3,$$

são isometrias de \mathbb{S}^2 , pois;

1. se $p \in \mathbb{S}^2$, então $T(p) \in \mathbb{S}^2$, uma vez que $|\vec{oT(p)}| = |\vec{o p}| = 1$,
2. $dT_p : T_p \mathbb{S}^2 \rightarrow T_{T(p)} \mathbb{S}^2$ é dada por $dT_p \cdot u = T(u)$ e, por isto, preserva a métrica esférica;

$$g(dA_p \cdot u, dA_p \cdot v) = \langle dA_p \cdot u, dA_p \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle = g(u, v).$$

Estas transformações lineares são isometrias de \mathbb{E}^3 que, quando descritas com respeito a uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , as suas representações matriciais formam o grupo ortogonal

$$O_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = A^t \cdot A = I\}. \quad (4.1)$$

Portanto, segue que O_3 é um subgrupo de $Isom(\mathbb{S}^2)$. No entanto, temos o seguinte resultado $Isom(\mathbb{S}^2) \subset O_3$;

Teorema 4.1.

$$Isom(\mathbb{S}^2) = O_3$$

Demonstração. Vamos mostrar que $Isom(\mathbb{S}^2) \subset O_3$.

Seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e $T_0 \in Isom(\mathbb{S}^2)$. Observamos que $e_i \in \mathbb{S}^2$ e $e_i \in T_u\mathbb{S}^2$ se $\langle e_i, u \rangle = 0$. Portanto,

$$\langle T_0(e_i), T_0(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle,$$

para todo $i, j = 1, 2, 3$. Consideramos a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(u) = \begin{cases} |u| \cdot T_0\left(\frac{u}{|u|}\right), & \text{se } |u| \neq 0, \\ 0, & \text{se } u = 0. \end{cases}$$

Se $u \in \mathbb{S}^2$, então $T(u) = T_0(u)$. Tendo em vista que a base $\beta' = \{T(e_1), T(e_2), T(e_3)\}$ é ortonormal, então para todo $u \in \mathbb{R}^3$

$$T(u) = \sum_1^3 \langle T(u), T(e_i) \rangle T(e_i) = \sum_i \langle u, e_i \rangle T(e_i).$$

Além disto, se $u \neq 0$, temos que $u = |u| \cdot u_0$, onde $u_0 = \frac{u}{|u|} \in \mathbb{S}^2$. Desta forma, segue da definição que

$$\begin{aligned} T(u) &= |u| \cdot T(u_0) = |u| \cdot \sum_i \langle u_0, e_i \rangle T(e_i) = \\ &= \sum_i \langle |u| \cdot u_0, e_i \rangle T(e_i) = \sum_i \langle u, T(e_i) \rangle T(e_i). \end{aligned}$$

Consequentemente, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear e, para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \sum_{i,j} u^i v^j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \sum_{i,j} u^i v^j \langle e_i, e_j \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Portanto, a matriz de T na base β pertence a O_3 , ou seja, a cada $T_0 \in Isom(\mathbb{S}^2)$ corresponde uma única transformação ortogonal $T \in O_3$. Consequentemente, $Isom(\mathbb{S}^2) \subset O_3$, da onde concluímos que $Isom(\mathbb{S}^2) = O_3$. □

Em decorrência do teorema acima, as isometrias mais simples pertencentes à $Isom(\mathbb{S}^2)$ são as rotações e as reflexões sobre planos passando pela origem.

Definição 4.3. Sejam π um plano em \mathbb{R}^3 e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base de π ;

1. A rotação de ângulo θ sobre π é a transformação linear $R_\theta^\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que fixa a direção ortogonal à π e realiza uma rotação de ângulo θ sobre o plano π . Desta maneira, a matriz de R_θ^π na base β é

$$[R_\theta^\pi]_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Uma reflexão sobre o plano π é uma transformação linear $r_\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que na base β , é representada pela matriz

$$[r_\pi]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que se $A \in O_3$, então

$$\det(A^t.A) = 1 \quad \Rightarrow \quad |\det(A)| = 1,$$

ou seja, $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$. As transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^3 com determinante igual a 1 formam o grupo ortogonal especial

$$SO_3 = \{A \in O_3 \mid \det(A) = 1\}. \quad (4.2)$$

Desta maneira, $Isom^0(\mathbb{S}^2) = SO_3$ corresponde ao subgrupo de isometrias de $Isom(\mathbb{S}^2)$ que preservam a orientação.

Decorre da rigidez das isometrias que os autovalores de uma transformação ortogonal são ou 1 ou -1 , pois, se $u \neq 0$ e $Tu = \lambda.u$, então

$$\langle Tu, Tu \rangle = \langle u, u \rangle \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 - 1) |u|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda| = 1.$$

Proposição 4.1. *Com respeito a transformações ortogonais de \mathbb{R}^3 , temos que;*

1. Toda transformação $T \in O_3$ fixa uma direção em \mathbb{R}^3 .
2. Seja $T \in Isom(S^2)$. Existe uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ e um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que a matriz de T na base β é dada ou por

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou por} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demonstração. O polinômio característico de T é da forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

e as suas raízes reais são 1 ou -1 . Um polinômio de grau 3 com coeficientes reais sempre tem uma raiz real, da onde concluímos que há uma direção fixada por T .

1. Suponha que $p_T(\lambda)$ possui uma raiz igual a 1; neste caso

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

Sejam e_3 o autovetor unitário correspondente ao auto-valor $\lambda = 1$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço ortogonal a reta l_3 determinada por e_3 . Segue do fato que T preserva a ortogonalidade entre subespaços vetoriais que V é invariante por T e

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus \langle e_3 \rangle.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base de V e $R = T|_V : V \rightarrow V$. Então, em relação a base $\{e_1, e_2, e_3\}$, a matriz de T é da forma

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } R : V \rightarrow V \text{ satisfaz } R^t R = R.R^t = I$$

Considerando que $V \simeq \mathbb{R}^2$, segue da proposição () que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que ou $R = R_\theta$ ou $R = R_\theta.r_x$. No primeiro caso, R_θ não possuiu auto-valores reais uma vez que trata-se de uma rotação; então,

$$A = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No segundo caso, R é uma reflexão em V e por isto fixa uma direção e inverte a outra (em V), isto é, os autovalores são, precisamente, -1 e 1 . Neste caso,

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Os argumentos são análogos para o caso quando

$$p_T(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

□

Corolário 4.1. *Qualquer isometria em $Isom(\mathbb{S}^2)$ é a composição de rotações ou de reflexões sobre planos passando pela origem em \mathbb{R}^3 .*

Definição 4.4. O ângulo entre dois planos π_1 e π_2 em \mathbb{R}^3 é definido como sendo o ângulo entre os respectivos vetores normais $v_1(\perp \pi_1)$ e $v_2(\perp \pi_2)$,

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \angle(v_1, v_2).$$

Proposição 4.2. *Sejam π, π' planos em \mathbb{R}^3 e $r_\pi, r_{\pi'}$ as reflexões em relação a cada plano respectivamente. Então,*

1. *Se π, π' são transversais, formando um ângulo θ entre eles, e passam pela origem, então existe uma base de \mathbb{R}^3 tal que*

$$r_\pi \circ r_{\pi'} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Sejam π e π' planos paralelos, então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ ortogonal aos planos tal que*

$$r_\pi \circ r_{\pi'} = T_v, \quad \text{onde } |v| = 2 \cdot \text{dist}(\pi, \pi')$$

Como consequência dos resultados acima, temos uma situação idêntica a obtida para $Isom(\mathbb{E}^2)$.

Teorema 4.2. *O grupo $Isom(\mathbb{S}^2)$ é gerado pelas reflexões sobre os planos que passam pela origem.*

Se $\pi \subset \mathbb{R}^3$ é um plano passando pela origem, denotamos por l_π a reta definida pela direção invariante de R_θ^π ($l_\pi \perp \pi$).

Exercício 4.2. .

1. Mostre que dados 2 planos π_1 e π_2 passando pela origem em \mathbb{R}^3 , existe uma transformação ortogonal $A \in SO_3$ tal que $A(\pi_1) = \pi_2$.
2. Demonstre a proposição 4.2 acima.

4.3 Geodésicas de \mathbb{S}^2

Devido as limitações do *espaço-tempo*, não vamos apresentar uma demonstração de como classificar as geodésicas sobre \mathbb{S}^2 a partir da métrica esférica. Em vez disto, iremos enunciar alguns Axiomas.

Os pontos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ definem o plano π_{pq} , que contém a origem e é gerado pelos vetores \vec{op} e \vec{oq} :

$$\pi_{pq} = \{s.\vec{op} + t.\vec{oq} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

A interseção de $\mathbb{S}^2(R)$ com π_{pq} é uma circunferência que denominamos de *equador* e denotamos por ϵ_{pq} . Além disto, os pontos p e q dividem o equador ϵ_{pq} em dois arcos ϵ_{pq}^1 e ϵ_{pq}^2 denominados *segmentos*.

Axioma 4.1. *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ existe um único equador $\epsilon \subset \mathbb{S}^2(R)$ tal que $p, q \in \epsilon$.*

Axioma 4.2. *Os pontos p e q dividem o equador ϵ_{pq} em dois segmentos ϵ_{pq}^1 e ϵ_{pq}^2 .*

Axioma 4.3. *A distância esférica entre dois pontos distintos $p, q \in \mathbb{S}^2(R)$ é*

$$d_{\mathbb{S}^2(R)}(p, q) = \inf(L(\epsilon_{pq}^1), L(\epsilon_{pq}^2)).$$

Axioma 4.4. *Para qualquer par de equadores ϵ_1 e ϵ_2 há uma transformação $f : \mathbb{S}^2(R) \rightarrow \mathbb{S}^2(R)$ que preserva as distâncias entre pontos de $\mathbb{S}^2(R)$ e $f(\epsilon_1) = \epsilon_2$.*

Observação. A interseção de duas geodésicas quaisquer de \mathbb{S}^2 é não-vazia, o que implica na não existência de geodésicas *paralelas*. Este fato é surpreendente ao compararmos com a mesma situação em \mathbb{E}^2 .

Uma vez que classificamos as isometrias de \mathbb{S}^2 e as geodésicas de \mathbb{S}^2 , podemos descrever intrinsecamente os resultados da seção anterior.

Proposição 4.3. *Propriedades de $Isom(\mathbb{S}^2)$.*

1. O grupo $Isom(\mathbb{S}^2)$ é gerado pelas reflexões ao longo de geodésicas.
2. Existe um subgrupo $Isom^0(\mathbb{S}^2) < Isom(\mathbb{S}^2)$, de índice 2, gerado por isometrias que são um produto de um número par de reflexões ao longo de geodésicas (por isto preservam a orientação).
3. Todo elemento de $Isom^0(\mathbb{S}^2)$ fixa dois pontos sobre \mathbb{S}^2 .
4. Toda isometria de \mathbb{S}^2 é determinada pela imagem de 3 pontos.

Exercício 4.3.

1. Sejam α, β geodésicas de \mathbb{S}^2 e r_α, r_β as respectivas reflexões.
 - (a) Mostre que $r_\alpha \circ r_\beta$ fixa dois pontos sobre \mathbb{S}^2 e $\det(r_\alpha \circ r_\beta) = 1$.
 - (b) Defina o ângulo entre duas geodésicas de \mathbb{S}^2 e determine uma expressão, em função do ângulo, para $r_\alpha \circ r_\beta$.
 - (c) Demonstre a proposição 4.3.

Observação. Se observarmos um equador sobre \mathbb{S}^2 , temos que ele é uma geodésica mas nem sempre minimiza a distância entre dois pontos. Vejamos o seguinte caso: seja $p = (1, 0, 0)$ e $q = \gamma(t)$ um outro ponto qualquer sobre o equador $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$. Se considerarmos $q = \gamma(\pi + \epsilon)$, temos que γ não realiza a distância $d_{\mathbb{S}^2}(p, q) = \pi - \epsilon$, pois

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi+\epsilon} |\gamma'(t)| dt = \pi + \epsilon.$$

O que ocorre, é que a distância entre p e q é realizada pela geodésica $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(2\pi - t)$. Entender quando uma geodésica deixa de minimizar a distância entre pontos é um capítulo muito ilustrativo e bonito na Geometria Riemanniana ([?]).

4.3.1 Fórmula da Distância e Relações Métricas em \mathbb{S}^2

Determinar a distância entre dois pontos sobre \mathbb{S}^2 , certamente, foi um problema importante e difícil. O astrolábio é um instrumento que auxilia os navegadores a determinarem a sua latitude e, por conseguinte, as distâncias percorridas. Esta era uma questão fundamental para os navegadores, a Escola de Sagres consagrou-se pelos seus conhecimentos e pela eficiência de seus instrumentos para a navegação. As coordenadas esféricas sobre \mathbb{S}^2 tornam a questão, teoricamente, simples.

Nesta seção, todos os ângulos e arcos são medidos em radianos. Sejam

$$\begin{aligned} p_1 &= (\cos(\theta_1)\sin(\psi_1), \sin(\theta_1)\sin(\psi_1), \cos(\psi_1)) \\ p_2 &= (\cos(\theta_2)\sin(\psi_2), \sin(\theta_2)\sin(\psi_2), \cos(\psi_2)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

pontos de \mathbb{R}^3 e seja α o ângulo entre os vetores $u_1 = \vec{op}_1$ e $u_2 = \vec{op}_2$. Então, a distância esférica entre p_1 e p_2 é

$$d_{\mathbb{S}^2}(p_1, p_2) = \alpha.$$

A determinação de α é uma tarefa fácil, uma vez que,

$$\cos(\alpha) = \langle u_1, u_2 \rangle = \cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\psi_1)\sin(\psi_2) + \cos(\psi_1)\cos(\psi_2).$$

Após fazermos $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, $1 - \cos(\Delta\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ e algumas manipulações algébricas, obtemos a expressão

$$\cos(\alpha) = \cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi) + 2\sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).\cos(\psi_1).\cos(\psi_2).$$

Consequentemente,

$$d_{\mathbb{S}^2}(p_1, p_2) = \arccos\left(\cos(\Delta\theta).\cos(\Delta\psi) + 2\sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).\cos(\psi_1).\cos(\psi_2)\right). \quad (4.2)$$

Sem perda de generalidade, poderíamos ter suposto que o ponto p_1 esta sobre o plano-xy, neste caso $\psi_1 = \pi/2$ e

$$d_{\mathbb{S}^2}(p_1, p_2) = \arccos(\cos(\Delta\theta) \cdot \text{sen}(\psi_2)).$$

Exercício 4.4. .

1. Sejam $A = (1, 0, 0)$ e $C_{\mathbb{S}^2} = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid d_{\mathbb{S}^2}(A, p) = r_0\}$ o círculo esférico com centro em $A = (1, 0, 0)$ e raio r_0 . Parametrize $C_{\mathbb{S}^2}$ e verifique o caso quando $r_0 = \pi/2$.
2. Calcule o comprimento de $C_{\mathbb{S}^2}$.
3. Resolva os itens acima para o caso da esfera $\mathbb{S}^2(R)$ e verifique os resultados quando $R \rightarrow \infty$.

Definição 4.5. Sejam $A, B, C \in \mathbb{S}^2$ pontos que não pertencem a uma mesma geodésica. Um triângulo esférico em \mathbb{S}^2 com vértices A, B, C é o conjunto formado pela união das geodésicas ligando A à B , B à C e C à A .

Teorema 4.3. *Teorema de Pitágoras Esférico* - Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico sobre \mathbb{S}^2 com ângulo retângulo no vértice A e hipotenusa medindo a . Seja b o comprimento do lado oposto à B e c à C . Então,

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c). \quad (4.3)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar o lado AB sobre o equador $\psi = \pi/2$. Assim, temos que

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (\cos(c), 0, \text{sen}(c)) \quad \text{e} \quad C = (\cos(b), \text{sen}(b), 0).$$

Portanto,

$$\langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c).$$

□

Proposição 4.4. *Lei dos Cossenos* - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico em $S^2(R)$ com ângulos internos medindo α, β e γ e cujos lados opostos medem a, b e c , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\text{sen}\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, & \cos(\beta) &= \frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{R}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\text{sen}\left(\frac{a}{R}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0), & B &= (\cos(\theta_B)\text{sen}(\psi_B), \text{sen}(\theta_B)\text{sen}(\psi_B), \cos(\psi_B)) \\ C &= (\cos(\theta_C), \text{sen}(\theta_C), 0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{a}{R}\right) &= \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B), \\
\cos\left(\frac{b}{R}\right) &= \langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle = \cos(\theta_C), \\
\cos\left(\frac{c}{R}\right) &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \cos(\theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B);
\end{aligned} \tag{4.6}$$

da onde segue que,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right) &= \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)} \\
\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right) &= \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Os vetores

$$\begin{aligned}
n_{AB} &= \frac{\vec{OA} \times \vec{OB}}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|} = \left(\frac{0, -\cos(\psi_B), \operatorname{sen}(\theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)}} \right) \\
n_{BC} &= \frac{\vec{OB} \times \vec{OC}}{|\vec{OB} \times \vec{OC}|} = \frac{(-\cos(\psi_B) \operatorname{sen}(\theta_C), \cos(\psi_B) \cos(\theta_C), \operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B))}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)}} \\
n_{CA} &= \frac{\vec{OC} \times \vec{OA}}{|\vec{OC} \times \vec{OA}|} = (0, 0, -1)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

determinam os planos π_{AC} , π_{AB} e π_{BC} , respectivamente. Considere $\{n_{AB}, n_{BC}, n_{CA}\}$ uma base orientada de \mathbb{R}^3 . Uma vez que,

$$\cos(\alpha) = -\langle n_{AC}, n_{AB} \rangle, \quad \cos(\beta) = -\langle n_{AB}, n_{BC} \rangle, \quad \cos(\gamma) = -\langle n_{AC}, n_{BC} \rangle,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)}} \\
\cos(\beta) &= \frac{\cos^2(\psi_B) \cos(\theta_C) - \operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B) \operatorname{sen}(\theta_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)} \sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)}} \\
\cos(\gamma) &= \frac{\operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B)}{\sqrt{\cos^2(\psi_B) + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}^2(\psi_B)}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Da relação 4.6, temos

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{a}{R}\right) &= \cos\left(\frac{b}{R}\right) \cos\left(\frac{c}{R}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right) \operatorname{sen}(\theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B) \\
\operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B) &= \operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right) \cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right) \operatorname{sen}(\theta_B) \operatorname{sen}(\psi_B),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B) &= \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)} \\ \operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B)\operatorname{sen}(\psi_B) &= \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

As expressões 4.11, quando aplicadas à 4.9, resultam nas seguintes identidades:

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right) - \cos\left(\frac{b}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}, \quad \cos(\gamma) = \frac{\cos\left(\frac{c}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{b}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}. \quad (4.12)$$

Analogamente, a identidade para o $\cos(\beta)$ é obtida a partir da situação na qual os vértices do $\triangle ABC$ são

$$\begin{aligned} A &= (1, 0, 0), \quad B = (\cos(\theta_B), \operatorname{sen}(\theta_B), 0) \\ C &= (\cos(\theta_C)\operatorname{sen}(\psi_C), \operatorname{sen}(\theta_C)\operatorname{sen}(\psi_C), \cos(\psi_C)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Neste caso, obtemos

$$\cos(\beta) = \frac{\cos\left(\frac{b}{R}\right) - \cos\left(\frac{a}{R}\right)\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}.$$

□

Lema 4.1. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 < 1$, $y^2 < 1$ e $z^2 < 1$ e sejam*

$$a = \frac{x - yz}{(1 - y^2)^{1/2}(1 - z^2)^{1/2}}, \quad b = \frac{y - zx}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - z^2)^{1/2}}, \quad (4.14)$$

$$c = \frac{z - xy}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2}}. \quad (4.15)$$

Então,

$$x = \frac{a + bc}{(1 - b^2)^{1/2}(1 - c^2)^{1/2}}, \quad y = \frac{b + ac}{(1 - a^2)^{1/2}(1 - c^2)^{1/2}}, \quad (4.16)$$

$$z = \frac{c + ab}{(1 - a^2)^{1/2}(1 - c^2)^{1/2}} \quad (4.17)$$

Demonstração. Ao fazermos $M = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$, temos que

$$\begin{aligned} 1 - a^2 &= \frac{(x - yz)^2 - (1 - y^2)(1 - z^2)}{(1 - y^2)(1 - z^2)} = \frac{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}{(1 - y^2)(1 - z^2)} = \\ &= \frac{M}{(1 - y^2)(1 - z^2)}. \end{aligned}$$

Analogamente, segue que

$$1 - b^2 = \frac{M}{(1 - x^2)(1 - z^2)}, \quad 1 - c^2 = \frac{M}{(1 - x^2)(1 - y^2)}.$$

Portanto, segue que

$$\frac{a + bc}{(1 - b^2)(1 - c^2)} = \frac{Mx}{M} = x$$

De maneira análoga, obtemos as outras expressões em 4.16. \square

Teorema 4.4. (Caso AAA) *Se os triângulos esféricos Δ_1 e Δ_2 tem ângulos internos congruentes, então eles são congruentes.*

Demonstração. Aplicando o lema 4.1, segue que

$$\cos(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\text{sen}(\beta)\text{sen}(\gamma)}, \quad \cos(b) = \frac{\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\gamma)}{\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\gamma)}, \quad (4.18)$$

$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cos(\beta)}{\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)} \quad (4.19)$$

\square

Teorema 4.5. *Lei dos Senos Esférica - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico sobre \mathbb{S}^2 . Sejam a , b e c o comprimento dos lados medidos em radianos, e sejam α , β e γ a medida dos ângulos interiores em cada vértice ($A \leftrightarrow \alpha$, $B \leftrightarrow \beta$ e $C \leftrightarrow \gamma$). Então,*

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(b)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}(c)}. \quad (4.20)$$

Demonstração. Segue da expressão 4.4 que

$$\text{sen}^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c)}{\text{sen}^2(b)\text{sen}^2(c)},$$

$$\text{sen}^2(\beta) = 1 - \cos^2(\beta) = \frac{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c)}{\text{sen}^2(a)\text{sen}^2(c)},$$

$$\text{sen}^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\gamma) = \frac{1 - \cos^2(a) - \cos^2(b) - \cos^2(c) + 2\cos(a)\cos(b)\cos(c)}{\text{sen}^2(a)\text{sen}^2(b)}.$$

Portanto, é imediato verificar a identidade 4.20. \square

Exercício 4.5. .

1. Teorema de Pitágoras.es

- (a) Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico em \mathbb{S}^2 , cujo ângulo retângulo encontra-se no vértice A e a hipotenusa mede a . Seja b o comprimento do lado oposto à B e c à C . Mostre que no limite $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ e $c \rightarrow 0$, vale a relação

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

conhecida como Teorema de Pitágoras Euclideano. (dica: use a série de Taylor $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^4)$, onde $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{o(\theta^4)}{\theta^2} = 0$).

- (b) Seja $\triangle ABC$ um triângulo geodésico sobre a esfera $\mathbb{S}^2(R)$, de raio R , cujo ângulo retângulo encontra-se no vértice A e a hipotenusa mede a . Seja b o comprimento do lado oposto à B e c à C . Mostre que,

$$\cos\left(\frac{a}{R}\right) = \cos\left(\frac{b}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{R}\right). \quad (4.21)$$

- (c) No item anterior, analise o limite quando $R \rightarrow 0$. Conclua que, sobre a superfície da Terra, podemos fazer uso do teorema de Pitágoras euclideano para realizar medidas numa obra de construção ou em distâncias dentro de uma cidade.
- (d) Repita a análise do item anterior para o caso $R \rightarrow \infty$ e interprete-o geometricamente.

2. Lei dos Senos

- (a) Mostre que sobre a esfera $S^2(R)$ a lei dos senos é

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}\left(\frac{a}{R}\right)} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}\left(\frac{b}{R}\right)} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{\text{sen}\left(\frac{c}{R}\right)}$$

e mostre que ao tomarmos o limite $R \rightarrow 0$ obtemos a Lei dos Senos euclideana

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}.$$

3. Lei dos Cossenos

- (a) Prove que a Lei dos Senos decorre da Lei dos Cossenos.
- (b) Mostre que no limite $R \rightarrow 0$ obtemos as leis dos cossenos da geometria euclideana e interprete o limite geometricamente.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha), \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta), \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma). \end{aligned} \quad (4.22)$$

- (c) Mostre que um triângulo é equilátero se, e somente se, os ângulos internos tem a mesma medida.
- (d) Obtenha condições para que um triângulo seja isósceles.
- (e) Seja $\triangle ABC$ um triângulo com lados medindo a, b, c e os ângulos internos medindo α, β, γ . Supondo que a, b, c correspondem aos lados opostos aos ângulos α, β, γ , respectivamente, mostre que $a < b < c$ se, e somente se, $\alpha < \beta, \gamma$.

4.3.2 Área de um Triângulo Esférico

Um gomo esférico em \mathbb{S}^2 é uma região limitada por duas geodésicas η e ρ que ligam pontos antípodas $p = (x, y, z)$ e $q = (-x, -y, -z)$ sobre \mathbb{S}^2 ; isto é, $\eta(0) = \rho(0) = p$ e $\eta(1) = \rho(1) = q$. Em cada um dos vértices, as geodésicas formam um ângulo θ que denominamos o ângulo do gomo. Um gomo com ângulo θ é equivalente, por uma isometria em $Isom(\mathbb{S}^2)$, à

$$G_\alpha = \{(\cos(\theta)\text{sen}(\psi), \text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi), \cos(\psi)) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \psi \leq \pi\}. \quad (4.23)$$

Lema 4.2. A área de um gomo com ângulo interno θ é igual a 2θ .

Demonstração. Utilizando coordenadas, esférica nós temos que

$$A = \int_0^\theta \int_0^\pi \text{sen}(\phi) d\phi d\theta = 2\theta$$

Em particular, se $\theta = 2\pi$ o resultado 4π é a área da esfera. □

Teorema 4.6. A área de um triângulo $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ em \mathbb{S}^2 , com ângulos internos medindo α , β e γ , é

$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \quad (4.24)$$

Demonstração. Considerando A como a área do triângulo, pelo lema anterior a área do gomo G_α com ângulo α é

$$A + A_\alpha = 2\alpha,$$

onde A_α é a área da região complementar ao triângulo no gomo. Uma vez que a área de \mathbb{S}^2 é 4π e que $\Delta \cup G_\alpha \cup G_\beta \cup G_\gamma$ é exatamente um hemisfério, segue que

$$A + A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2\pi.$$

Conseqüentemente,

$$A + (2\alpha - A) + (2\beta - A) + (2\gamma - A) = 2\pi,$$

da onde obtemos

$$A = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi. \quad \square$$

O fato de que a área depende apenas dos ângulos internos é uma forte indicação de que os lados de um triângulo esférico também são determinados pelos ângulos internos.

Exercício 4.6. .

1. Na geometria esférica, dois triângulos são congruentes se, e somente se, houver uma relação biunívoca entre os vértices dos triângulos de tal forma que os ângulos internos correspondentes são iguais (caso AAA).
2. A área de um gomo com ângulo interno θ , em $\mathbb{S}^2(R)$, é igual a $2\theta R^2$.
3. A área de um triângulo esférico $\Delta ABC \subset S^2(R)$, cujos ângulos internos medem α , β e γ , é

$$A = R^2 \cdot [(\alpha + \beta + \gamma) - \pi].$$

4. Determine a área de um triângulo esférico em função do comprimento dos lados.

Capítulo 5

Geometria Hiperbólica

A geometria hiperbólica foi descoberta devido ao insucesso em demonstrar o axioma das paralelas ???. Então, Janós Bolya e Lobachvesky observaram que alterando o axioma das paralelas não criavam-se contradições com os outros axiomas.

Axioma 5.1. *Sejam l uma reta e P um ponto não pertencente a l . Por P passam infinitas retas paralelas a l .*

No contexto da geometria riemanniana, desenvolvida a partir de uma métrica riemanniana, temos geodésicas onde se escrevem retas. A geometria que satisfaz o Axioma acima foi denominada de geometria hiperbólica. Considerando que a presente exposição baseia-se na métrica, o Axioma será uma consequência das propriedades das geodésicas da métrica hiperbólica.

5.1 Espaço Hiperbólico

Seja $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, o semi-plano superior de \mathbb{R}^2 .

Definição 5.1. A métrica hiperbólica $(g_h)_p : T_p\mathbb{R}_+^2 \times T_p\mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada pela seguinte expressão: sejam $p = (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $v = (v_1, v_2)$ e $w = (w_1, w_2)$ pertencentes à $T_{(x,y)}\mathbb{R}_+^2$, então

$$(g_h)_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{y^2}(v_1w_1 + v_2w_2). \quad (5.1)$$

Em termos do produto interno euclidiano, temos que

$$(g_h)_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle. \quad (5.2)$$

Associada a métrica g temos a conexão de Levi-Civita sobre \mathbb{R}_+^2 cuja curvatura é $K = -1$. O valor da curvatura é apenas uma das consequências importantes da métrica.

Definição 5.2. O Espaço Hiperbólico é a superfície riemanniana

$$\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_h).$$

O comprimento de uma curva $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, onde $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, é

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{(y(t))^2} dt. \quad (5.3)$$

Exemplo 5.1. Em cada um dos itens abaixo, considere $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva definida pela expressão dada, vamos determinar o comprimento $L(\gamma)$.

1. $\gamma(t) = (a, t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (semi-reta vertical).

$$\gamma'(t) = (0, 1) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right). \quad (5.4)$$

2. $\gamma(t) = (t, at + b)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ (semi-reta).

Sejam $y_0 = \gamma(t_0)$ e $y_1 = \gamma(t_1)$. Sendo assim, $\gamma'(t) = (1, a)$ e

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{1+a^2}{(at+b)^2}} dt = \\ &= \sqrt{1+a^2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{at+b} = \sqrt{1+a^2} \cdot \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{y_0 \rightarrow 0} L(\gamma) = \infty$.

3. $\gamma(\theta) = (\rho \cos(\theta) + a, \rho \sin(\theta) + b)$, onde $\rho < b$, $t_0 = 0$ e $t_1 = 2\pi$ (círculo de raio ρ e centro em (a, b)).

$$\gamma'(\theta) = \rho(-\sin(\theta), \cos(\theta)) \quad \Rightarrow \quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{b + \rho \sin(\theta)}$$

Substituindo $t = tg(\theta/2)$, temos que $d\theta = \frac{2 \cdot dt}{1+t^2}$ e

$$L(\gamma) = \frac{2\rho}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t + \frac{\rho}{b}\right)^2 + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2}}.$$

Substituindo novamente por $u = t + \frac{\rho}{b}$, temos $du = dt$ e

$$L(\gamma) = \frac{2\rho}{b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{b^2 - \rho^2}{b^2}} = \quad (5.5)$$

$$= \frac{2\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{bt + \rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}}. \quad (5.6)$$

Segue que $\lim_{b \rightarrow \rho} L(\gamma) = \infty$, uma vez que o círculo aproxima-se do eixo-x. Os cálculos efetuados neste exemplo não estendem-se para $b = 0$.

5.1.1 Reflexões no Espaço Hiperbólico

A distância entre dois pontos p e q em \mathbb{H}^2 é definida por

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p, q)} L(\gamma).$$

Para determinar $d(p, q)$, em função de p e q , precisamos descrever as geodésicas de \mathbb{H}^2 . Com este fim, vamos estudar, primeiramente, a geometria das transformações de inversão sobre círculos, também denominadas de reflexões.

Dentre as isometria de \mathbb{E}^2 , as únicas que são isometrias de \mathbb{H}^2 são as reflexões sobre retas verticais e as suas composições, como mostra a proposição a seguir;

Proposição 5.1. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $l = \{(a, y) \mid y \in \mathbb{R}_+\}$ reta vertical em \mathbb{R}_+^2 . A transformação $r_l : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$, induzida pela reflexão euclideana sobre l , é uma isometria de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um ponto fixo e suponha que $l = \{(\alpha, y) \mid y > 0\}$. Assim, temos que

$$r_l(x, y) = (-x + 2\alpha, y) \quad dr_l = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$g_{(x,y)}(dr_l.v, dr_l.w) = \frac{1}{y^2} \langle dr_l.v, dr_l.w \rangle = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle = g_{(x,y)}(v, w).$$

□

Para descrevermos as outras geodésicas de \mathbb{H}^2 , introduziremos a transformação de inversão sobre um círculo no plano. Para isto, consideraremos o círculo de raio R e centro em $P = (a, b)$ como o conjunto

$$S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}, \quad S_R = S_R(O).$$

Definição 5.3. Uma transformação $r_{S_R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma inversão sobre S_R se

$$|r_{S_R}(v)| \cdot |v| = R^2, \quad \text{onde} \quad |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \quad (5.7)$$

Em coordenadas, temos que

$$r_{S_R}(x, y) = R^2 \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right). \quad (5.8)$$

Observação. Se considerarmos \mathbb{R}^2 como o espaço complexo \mathbb{C} , isto é, identificarmos $(x, y) \rightsquigarrow z = x + iy$, segue que a transformação r_{S_R} é dada por

$$r_{S_R}(z) = R^2 \cdot \frac{z}{|z|^2} = \frac{R^2}{\bar{z}}. \quad (5.9)$$

Assim, $r_{S_R} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é anti-holomorfa, ou seja, preserva ângulo e inverte a orientação.

Proposição 5.2. *A transformação de inversão $r_{S_R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem as seguintes propriedades:*

1. *Se $l \subset \mathbb{R}^2$ é uma reta, então $r_{S_R}(l)$ é ou uma reta ou um círculo.*
2. *Se $C \subset \mathbb{R}^2$ é um círculo, então $r_{S_R}(C)$ é ou uma reta ou um círculo.*

Demonstração. Observamos que

$$\begin{cases} u = R^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = R^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = \frac{x}{y} \\ u^2 + v^2 = \frac{R^4}{x^2 + y^2} \end{cases},$$

da onde

$$x = R^2 \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = R^2 \frac{v}{u^2 + v^2}$$

1. Suponha que $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$. Se substituirmos as expressões acima, obtemos

$$R^2 \cdot \frac{au + bv}{u^2 + v^2} + c = 0. \quad (5.10)$$

Portanto, há duas possibilidades a serem consideradas;

- (a) $c = 0$.
Segue que

$$au + bv = 0. \quad (5.11)$$

- (b) $c \neq 0$.
Neste caso, temos que

$$R^2 au + R^2 bv + c(u^2 + v^2) = 0,$$

o que implica em que

$$\left(u + \frac{aR^2}{2c}\right)^2 + \left(v + \frac{bR^2}{2c}\right)^2 = R^4 \cdot \frac{a^2 + b^2}{4c^2}. \quad (5.12)$$

2. Suponha que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$. Ao substituirmos x e y em função de u e v na relação que define o círculo, obtemos a relação

$$(R^2 u - a(u^2 + v^2))^2 + (R^2 v - b(u^2 + v^2))^2 = r^2(u^2 + v^2)^2 \quad (5.13)$$

Ao expandirmos a expressão 5.13, mantendo os termos de $(u^2 + v^2)$, chegamos aos seguintes casos;

- (a) $a^2 + b^2 - r^2 = 0$.
Neste caso, temos que

$$au + bv = \frac{R^2}{2}. \quad (5.14)$$

- (b) $a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$.
Após completarmos os quadrados, obtemos a relação

$$\left(u - \frac{aR^2}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(v - \frac{bR^2}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 = \frac{r^2 R^4}{(a^2 + b^2 - r^2)^2}. \quad (5.15)$$

□

Exercício 5.1. 1. Seja $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$. Determine a inversão sobre o círculo S_2 .

2. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1)^2 = r^2\}$. Determine a inversão sobre o círculo S_2 e analise o que ocorre quando variamos o parâmetro r .

3. Seja

$$S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\},$$

o círculo de raio R e centro em $P = (a, b)$. Mostre que a inversão sobre $S_R(P)$ define a aplicação $r_{S_R(P)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2} (x - a, y - b) + (a, b). \quad (5.16)$$

4. Sejam $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ e $r_{S_R} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ a inversão sobre $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$. Se $r_{S_R}(C_1) = C_2$, onde $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2\}$, então:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^2, \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\frac{\alpha}{a}(a^2 + b^2 - r^2)}. \quad (5.17)$$

5. Mostre que a inversão dada por 5.16 transforma retas e círculos em retas ou círculos.

6. Estude as relações análogas à 5.17 quando S_R tem centro sobre o eixo-x.

Proposição 5.3. *Seja $S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}$ um círculo cujo centro encontra-se em $p = (a, 0)$ (sobre o eixo-x). Então, a inversão $r_{S_R(P)}$ é uma isometria de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Consideremos o caso geral ($b \neq 0$)

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x - a)^2 + (y - b)^2} (x - a, y - b) + (a, b) = (u, v).$$

Segue que $dr_{S_R(P)} : T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{(u,v)}\mathbb{R}^2$ aplicada ao vetor $w = (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$ é dado por

$$dr_{S_R(P)}.w = \frac{R^2}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^2} \begin{pmatrix} (y - b)^2 - (x - a)^2 & -2(x - a)(y - b) \\ -2(x - a)(y - b) & (x - a)^2 - (y - b)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$g_{(u,v)}(dr_{S_R(P)}.w, dr_{S_R(P)}.w) = R^4 \cdot \frac{w_1^2 + w_2^2}{[R^2(y - b) + b[(x - a)^2 + (y - b)^2]]^2}.$$

Se $b = 0$, a expressão acima torna-se

$$g_{(u,v)}(dr_{S_R(P)}.w, dr_{S_R(P)}.w) = \frac{w_1^2 + w_2^2}{y^2} = g_{(x,y)}(w, w).$$

Desta maneira, a transformação

$$r_{S_R(P)}(x, y) = \frac{R^2}{(x - a)^2 + y^2} (x - a, y) + (a, 0) \quad (5.18)$$

induz um difeomorfismo $r_{S_R(P)} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ que preserva a métrica hiperbólica. Consequentemente, $r_{S_R(P)}$ definida é uma isometria. \square

O termo reflexão será utilizado para designar as inversões sobre os círculos centrados sobre o eixo-x, assim como para as reflexões sobre retas verticais.

Observação. Se interpretadas como funções de uma variável complexa, as reflexões correspondem as funções anti-holomorfas.

$$r_l(z) = -\bar{z} + 2\alpha, \quad r_{S_R(P)} = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0. \quad (5.19)$$

Exercício 5.2. Sejam $P_1, P_2 \in \mathbb{H}^2$. Mostre que:

1. Se P_1 e P_2 encontram-se sobre uma reta, então através de uma isometria de \mathbb{H}^2 ambos são levados ou sobre uma reta vertical ou sobre um círculo centrado no eixo-x.
2. Se P_1 e P_2 não encontram-se sobre uma reta vertical, então existe uma isometria de \mathbb{H}^2 tal que ambos são levados sobre uma mesma reta vertical.
3. Sejam α uma reta vertical e β um círculo centrado sobre o eixo-x tais que, na interseção $\{p\} = \alpha \cap \beta$, $\alpha \perp \beta$. Considerando que r_α e r_β são as respectivas reflexões, mostre que $r_\alpha(\beta) = \beta$ e $r_\beta(\alpha) = \alpha$.
4. Sejam α e β dois círculos centrados sobre o eixo-x que, na interseção $\{p\} = \alpha \cap \beta$, são ortogonais. Assim como no item anterior, mostre que $r_\alpha(\beta) = \beta$ e $r_\beta(\alpha) = \alpha$.

5.2 Geodésicas de \mathbb{H}^2

Proposição 5.4. *Seja $a \in \mathbb{R}$. A semi-reta $l = \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ é uma geodésica de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Seja $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ a parametrização $\gamma(t) = (a, t)$ de l e sejam $p_0 = (a, t_0)$ e $p_1 = (a, t_1)$. O comprimento de γ em \mathbb{H}^2 , de acordo com 5.4, é

$$L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{t_1}{t_0}\right).$$

Seja $\beta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma outra curva ligando os pontos p_0 e p_1 dada por $\beta(t) = (x(t), y(t))$. Assuma (sem perda de generalidade) que $\beta(t_0) = (a, t_0)$ e $\beta(t_1) = (a, t_1)$. Assim,

$$L(\beta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{((x')^2 + (y')^2)} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln\left(\frac{t_0}{t_1}\right).$$

Portanto, $L(\beta) \geq L(\gamma)$, o que implica que γ minimiza a distância e, portanto, é uma geodésica de \mathbb{H}^2 . \square

Corolário 5.1. *Os círculos cujo centro encontram-se sobre o eixo-x são geodésicas de \mathbb{H}^2 .*

Demonstração. Consideremos o semi-círculo $C = \{(x, y) \mid (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2\} \cap \mathbb{H}^2$, vamos mostrar que em \mathbb{H}^2 existe uma isometria levando C sobre uma semi-reta vertical. Para isto, consideramos a isometria obtida pela reflexão sobre o círculo

$$S_R(P) = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}.$$

Conforme 5.13, a imagem de C é conjunto dos pontos $(u, v) \in \mathbb{H}^2$ satisfazendo a relação

$$R^4 + 2R^2(a - \alpha)(u - a) = [r^2 - (a - \alpha)^2][(u - a)^2 + v^2].$$

Portanto, se $a = \alpha + r$ ou $a = \alpha - r$, a imagem de C é a semi-reta

$$l = \left\{ \left(a - \frac{R^2}{2(a - \alpha)}, y \right) \mid y > 0 \right\}.$$

Concluimos que a reflexão sobre o círculo com centro em $(a, 0)$, onde $a = \alpha + r$ ou $a = \alpha - r$, leva C sobre l . A conclusão segue de 5.4. \square

Teorema 5.1. *Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma geodésica em \mathbb{H}^2 , então são as seguintes as possibilidades;*

1. γ descreve um segmento sobre a reta vertical.
2. γ descreve uma curva sobre um semi-círculo centrado no eixo- x .

Demonstração. Sejam p e q dois pontos quaisquer em \mathbb{H}^2 e $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma geodésica minimizando a distância entre eles. Há dois casos a serem considerados;

1. p e q encontram-se sobre uma reta vertical l .
Segue que β é o segmento vertical pertencente à l cujas extremidades são p e q .

2. p e q não encontram-se sobre uma mesma reta vertical.
Neste caso, consideremos o círculo C centrado no eixo- x e passando por p e q . Vimos que existe uma isometria $r : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que a imagem $r(C)$ é uma reta vertical. De acordo com o item anterior, a única possibilidade é que a imagem $r(\beta)$ esteja sobre a reta vertical $r(C)$, que por sua vez, é a imagem do arco contido em C que liga p à q .

\square

Corolário 5.2. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$. Existe uma única geodésica minimizante ligando p à q .*

Desta maneira, o espaço hiperbólico satisfaz o axioma 5.1.

Exercício 5.3. .

1. Sejam $p = (a, y_0)$ e $q = (a, y_1)$, onde $y_0 \leq y_1$. Assim, segue de 5.4 que $d(p, q) = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$.
Mostre que

$$d(p, q) = \ln\left(\frac{y_1}{y_0}\right) \Leftrightarrow \cosh(d(p, q)) = 1 + \frac{|y_1 - y_0|^2}{2y_0y_1}. \quad (5.1)$$

2. No item acima mostre que

$$\sinh\left(\frac{d(p, q)}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{|y_1 - y_0|}{\sqrt{y_0y_1}}. \quad (5.2)$$

3. Calcule $\tanh\left(\frac{d(p, q)}{2}\right)$.
4. Sejam $\gamma_1 = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e γ_2 geodésicas que na interseção formam um ângulo θ . Se α é o raio de γ_2 , mostre que $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \alpha \cdot \cos(\theta)| = \alpha\}$.

5.3 Isometrias de \mathbb{H}^2

Nesta seção, vamos descrever as isometrias de \mathbb{H}^2 . Para isto, utilizaremos o fato que as reflexões sobre as geodésicas de \mathbb{H}^2 pertencem a $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Lema 5.1. *Seja $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma isometria tal que $f(p) = p$ e $df_p = I : T_p\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$. Então, $f = id_{\mathbb{H}^2}$.*

Demonstração. Decorre de 5.2 juntamente com a observação que por p passa uma única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Sejam $q \in \mathbb{H}^2$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ a única geodésica ligando p à q , sendo que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\gamma'(0) = v$. Então $\beta = f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma geodésica ligando p à $f(q)$ satisfazendo

$$\beta(0) = p, \quad \beta'(0) = df_p \cdot \gamma'(0) = df_p \cdot v = v.$$

Consequentemente, segue que $\beta = \gamma$, o que implica em $f(q) = q$. □

Teorema 5.2. *Seja $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma isometria, então f é o produto de no máximo 3 reflexões.*

Demonstração. Considere os pontos p_0 e p_1 em \mathbb{H}^2 e $q_0 = f(p_0)$, $q_1 = f(p_1)$. Seja γ_1 a geodésica ligando p_0 à p_1 e β_1 a geodésica ligando q_0 à q_1 . Seja $r_1 : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ a reflexão tal que $r_1(q_0) = p_0$ e $r_1(q_1) = p_1$. Desta forma, a geodésica γ_1 é invariante pela isometria $f_1 = r_1 \circ f$. Há duas possibilidades para serem analisadas;

1. f_1 muda a orientação de γ_1 .

Neste caso, consideremos r_2 a reflexão que muda a orientação de γ_1 ($r_2(\gamma(t)) = \gamma(-t)$) e fixa p . Assim, $f_2 = r_2 \circ f_1$ fixa γ_1 .

Agora, restam duas possibilidades;

- (a) $df_2(p) = I$.

Consequentemente, segue do lema que $f_2 = id_{\mathbb{H}^2}$, ou seja $f = r_1 \circ r_2$.

- (b) $df_2(p)$ possui auto-valor -1.

Geometricamente, isto significa que a geodésica ortogonal a γ_1 tem a sua orientação invertida por r_2 . Analogamente, aplicamos a reflexão r_3 , que inverte a orientação da direção ortogonal à γ_1 , e fixa p . Então $f_3 = r_3 \circ f_2 = id_{\mathbb{H}^2}$, da onde obtemos que $f = r_1 \circ r_2 \circ r_3$.

2. f_1 não muda a orientação de γ_1 .

A análise é similar. □

Como objetivo de descrever o grupo $Isom(\mathbb{H}^2)$, vamos estudar quais são as isometrias obtidas a partir das reflexões. Para isto, vamos utilizar a estrutura complexa do \mathbb{R}^2 . Para efeitos de notação,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\} \\ \widehat{\mathbb{C}} &= \mathbb{C} \cup \infty \end{aligned}$$

As reflexões sobre retas e círculos definem as seguintes funções de uma variável complexa: considere a, b e $c \in \mathbb{R}$,

$$r_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad r_l(z) = -\bar{z} + 2a \quad (5.1)$$

$$r_{b,c} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad r_{b,c}(z) = \frac{b}{\bar{z} - c} + c \quad (5.2)$$

Ao compor estas isometrias, obtemos as seguintes funções

$$(i) \quad r_{a_2} \circ r_{a_1}(z) = z + 2(a_2 - a_1), \quad (5.3)$$

$$(ii) \quad r_a \circ r_{b,c}(z) = -\frac{c}{z - b} - b + 2a, \quad (5.4)$$

$$(iii) \quad r_{b,c} \circ r_a(z) = \frac{c}{-z + (2a - b)} + b, \quad (5.5)$$

$$(iv) \quad r_{b_2,c_2} \circ r_{b_1,c_1}(z) = \frac{c_2 z - c_2 b_1}{(c_1 - c_2)z + c_1 - b_1(b_1 - c_2)} + b_2. \quad (5.6)$$

Decorre que as funções complexas acima geram um grupo, no sentido algébrico, de transformações holomorfas de \mathbb{C} (preservam a orientação) contidas no conjunto

$$\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Para determinarmos o grupo gerado observamos os seguintes casos;

1. Seja $k \neq 0 \in \mathbb{R}$ uma constante e suponha que $f(z) = k$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{cases} a = kc, \\ b = kd. \end{cases} \Rightarrow ad = bc$$

2. Suponha que $ad = bc$.

- (a) Se $a = 0$, então $b = 0$ ou $c = 0$. Se $b = 0$, temos que $f(z) = 0$; se $c = 0$, temos que $f(z) = b/d$.
- (b) Se $d = 0$, então $b = 0$ ou $c = 0$. Se $b = 0$, temos que $f(z) = a/c$; se $c = 0$, temos que $f(z)$ não está definida.
- (c) Se $a \neq 0$ e $d \neq 0$, então $d = \frac{bc}{a}$. Neste caso, temos que $f(z) = 1/c$.

Observamos que, se $f(z)$ não é constante então ela é inversível, pois,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Consequentemente, a condição $ad - bc \neq 0$ é necessária e suficiente para que $f(z)$ seja inversível. Desta forma, o grupo de isometrias obtidos é

$$\{f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0\}.$$

Agora, vamos consideraremos a ação das matrizes inversíveis $Gl_2(\mathbb{R})$ sobre \mathbb{H}^2 . Seja

$$\Phi : Gl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 \quad (5.7)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.8)$$

É imediato verificar que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z$$

se, e somente se, existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Portanto, a ação definida em () por uma matriz A é igual a da matriz $\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{|\det(A)|}}A$, com a vantagem que $\det(\bar{A}) = 1$. Assim, a ação de $Gl_2(\mathbb{R})$ é igual a ação do grupo das matrizes com determinante igual a 1.

Definição 5.4. As matrizes reais 2×2 com determinante igual a 1 formam o Grupo Linear Especial

$$Sl_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}. \quad (5.9)$$

A ação definida por Φ induz o homomorfismo sobrejetivo

$$\Phi : Sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow Isom^+(\mathbb{H}^2) \quad (5.10)$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (5.11)$$

Desta forma, o núcleo de Φ é

$$Nuc(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definição 5.5.

$$PSl_2(\mathbb{R}) = Sl_2(\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2.$$

Conseqüentemente,

$$Isom^+(\mathbb{H}^2) \simeq PSl_2(\mathbb{R}). \quad (5.12)$$

Teorema 5.3. Toda transformação $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ é determinada pela imagem de 3 pontos.

Demonstração. Suponha que $f \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ é dada por $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Sejam

$$w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f(z_2) \quad \text{e} \quad w_3 = f(z_3).$$

Assim, temos que para qualquer $k = 1, 2, 3$,

$$w - w_k = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)}.$$

Então,

$$w - w_1 = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}, \quad w - w_3 = \frac{(ad - bc)(z - z_3)}{(cz + d)(cz_3 + d)}.$$

Analogamente,

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)}, \quad w_2 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}.$$

Ao dividirmos as expressões acima, temos que

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \quad (5.13)$$

Consequentemente, ao colocarmos $w = f(z)$ em função de z , obtemos uma expressão para a transformação f . □

Corolário 5.3. A ação de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ sobre \mathbb{H}^2 é transitiva.

Demonstração. A demonstração é imediata, segue do fato que $Isom^+(\mathbb{H}^2) = PSl_2(\mathbb{R})$ e do teorema anterior. □

Definição 5.6. Sejam z_1, z_2, z_3, z_4 pontos em $\widehat{\mathbb{C}}$. A razão de Moebius é

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_4 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_4 - z_3)}$$

Quando $f \in Isom(\mathbb{H}^2)$, decorre da demonstração de 5.3 que

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Corolário 5.4. O grupo de isotropia, pela ação de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$, de um elemento $p \in \mathbb{H}^2$ é isomorfo a SO_2 .

Demonstração. Seja $p = (0, 1)$, o grupo de isotropia de $(0, 1)$ é formado pelas transformações $T \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ tais que $T(0, 1) = (0, 1)$. Considerando a representação complexa de $(0, 1)$ é i , segue que,

$$\frac{ai + b}{ci + d} = i \Rightarrow a = d, \quad c = -b.$$

Isto, juntamente com a relação $ad - bc = 1$ implicam que $a^2 + b^2 = 1$. Como a transformação preserva a orientação, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos(\theta)$ e $b = -\sin(\theta)$. Sendo assim, concluímos que $G_{(0,1)} = SO_2$. Decorre da transitividade da ação de $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ que para qualquer ponto $p \in \mathbb{H}^2$ $G_p \simeq SO_2$. □

Exercício 5.4. .

1. Determine a transformação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(i) = 0$, $f(0) = -1$ e $f(\infty) = 1$.
2. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma transformação dada pela expressão

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Mostre que se a, b, c e d são números reais, então $f(\mathbb{R}_+^2) = \mathbb{R}_+^2$.

3. No exercício anterior, descreva o conjunto $f(i\mathbb{R})$, onde $i\mathbb{R}$ é o eixo-y.

4. Mostre que $\Phi : Gl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ definido por

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

define um homomorfismo sobrejetor $\widehat{\Phi} : Gl_2(\mathbb{R}) \rightarrow Isom(\mathbb{H}^2)$ e conclua que $Nuc(\Phi) \simeq \mathbb{Z}_2$.

5. Sejam $\gamma_1 = \{iy \in \mathbb{H}^2; y \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{H}^2; |z - \alpha \cdot \cos(\theta)| = \alpha\}$ geodésicas que interceptam-se, onde α é o raio de γ_2 e θ é o ângulo formado na interseção. Se r_1 e r_2 são as respectivas reflexões, mostre que

$$r_2 r_1(z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\alpha \cdot \text{sen}^2(\theta) \\ 1/\alpha & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Determine a composição $r_2 r_1$ quando $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{i\}$.

6. Considere a transformação $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}. \quad (5.14)$$

Mostre que, $f(\mathbb{R}_+^2) = D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Em particular, $f(\mathbb{R} \times \{0\}) = S_1$, $f(0) = -1$, $f(i) = 0$ e $f(\infty) = 1$.

5.4 Relações Métricas Hiperbólicas

Primeiramente, vamos obter a expressão para a distância hiperbólica, a seguir estudaremos as relações métricas em triângulos hiperbólicos. É importante observarmos que para efeito de cálculos o modelo \mathbb{H}^2 será o mais utilizado, no entanto, para descrever a situação recorreremos com frequência ao modelo $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$.

5.4.1 Distância Hiperbólica

Tendo em vista que dados dois pontos em \mathbb{H}^2 existe uma única geodésica ligando-os e que as geodésicas de \mathbb{H}^2 são curvas bem conhecidas, vamos obter a expressão para a distância hiperbólica $d_{\mathbb{H}^2} : \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Porém, antes é necessário um lema fundamental para simplificar os cálculos e para representar as fórmulas.

Lema 5.2. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ dois pontos cujas representações como números complexos sejam z e w , respectivamente. Considerando que $g : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ é uma isometria e $I(z)$ é a parte imaginária de z , então,*

$$\frac{|g(z) - g(w)|}{[I(g(z)) \cdot I(g(w))]^{1/2}} = \frac{|z - w|}{(I(z) \cdot I(w))^{1/2}}. \quad (5.1)$$

Demonstração. Podemos verificar diretamente que,

$$g(z) - g(w) = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)}$$

Também temos que,

$$I(g(z)) = \frac{I(z)}{|cz + d|^2},$$

da onde observamos que

$$\frac{|g(z) - g(w)|}{[I(g(z)).I(g(w))]^{1/2}} = \frac{|z - w|}{[I(z).I(w)]^{1/2}}$$

□

Proposição 5.5. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^2$ dois pontos cujas representações como números complexos sejam z e w , respectivamente. A distância entre dois pontos p e q em \mathbb{H}^2 é*

$$d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right). \quad (5.2)$$

Demonstração. Quando $p = (0, a) = ia$ e $q = (0, b) = ib$, sendo $a < b$, segue de 5.4 que $d_{\mathbb{H}^2}(p, q) = \ln(b/a)$. Assim, $d = d(p, q)$ implica em $e^d = b/a$ e $e^{-d} = a/b$; conseqüentemente,

$$\cosh(d) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{|z - w|^2}{I(z).I(w)}. \quad (5.3)$$

Agora, sejam p e q dois pontos quaisquer em \mathbb{H}^2 representados por $z, w \in \mathbb{C}$, respectivamente, e $g \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ de tal forma que $g(z)$ e $g(w)$ pertencem a uma reta vertical. Ao aplicarmos o lema 5.2 à fórmula 5.3, concluímos que

$$\cosh(d(p, q)) = 1 + \frac{1}{2} \frac{|z - w|^2}{I(z).I(w)}. \quad (5.4)$$

Segue da identidade $\cosh(d) = 1 + 2\sinh^2(d/2)$ que

$$\sinh\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{|z - w|}{[I(z).I(w)]^{1/2}} \quad (5.5)$$

e de $\cosh(d) = 2\cosh^2(d/2) - 1$ que

$$\cosh^2\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(I(z).I(w))^{1/2}}, \quad |z - \bar{w}| = |\bar{z} - w|.$$

Portanto,

$$\tanh\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

Decorre de $\tanh(d/2) = \frac{e^d - 1}{e^d + 1}$ que

$$e^d = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|},$$

ou seja,

$$d = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).$$

□

Definição 5.7. O círculo hiperbólico de centro em p e raio R é o conjunto

$$S_R(p) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}^2}(p, z) = R\}. \quad (5.6)$$

Decorre da demonstração anterior que

$$\tanh(d(z, w)/2) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}. \quad (5.7)$$

Se $d(z, w) = R$ é constante, então

$$|z - w| = \tanh(R/2) \cdot |z - \bar{w}|.$$

Se tomarmos $c = \tanh(R/2)$ ($0 \leq c < 1$), $p = a + ib$ e $w = x + iy$ na equação acima, obtemos que

$$(1 - c^2)(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2(y + b)^2 = 0.$$

Após expandir e completar os quadrados, a expressão torna-se

$$(x - a)^2 + \left(y - b \frac{1 + c^2}{1 - c^2}\right)^2 = \left(\frac{2bc}{1 - c^2}\right)^2. \quad (5.8)$$

Portanto, concluímos que o círculo hiperbólico com centro em $p = (a, b)$ e raio R é um círculo euclidiano com centro em $\tilde{p} = (a, b')$, onde $b' = b \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \in \mathbb{H}^2$, e raio $\rho = \frac{2bc}{1 - c^2}$, onde $\rho < b \frac{1 + c^2}{1 - c^2}$. As fórmulas acima, escritas em função de R , ficam assim;

$$\tilde{p} = (a, b \cdot \cosh(R)), \quad \rho(R) = b \cdot \sinh(R); \quad (5.9)$$

da onde é imediato verificar que $b' = b \cdot \cosh(R) \geq b$, $\lim_{R \rightarrow 0} \rho(R) = 0$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} \rho(R) = \infty$.

Ao parametrizarmos o círculo hiperbólico $S_R(p)$ por

$$\gamma(\theta) = (\rho \cos(\theta) + a, \rho \sin(\theta) + b') \Rightarrow |\gamma'(\theta)|_{\mathbb{H}^2} = \frac{\rho}{b' + \rho \sin(\theta)}, \quad (5.10)$$

e aplicarmos a fórmula 5.4, obtemos que o comprimento do círculo hiperbólico de raio R é

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta}{b' + \rho \sin(\theta)} = 2\pi \cdot \sinh(R). \quad (5.11)$$

Exercício 5.5. Resolva os seguintes itens;

1. Prove a fórmula 5.11.
2. Se $R \simeq 0$, conclua que o comprimento do círculo é $L(\gamma) \simeq 2\pi R$.
3. Mostre que $\rho = b \cdot \sinh(R)$. Suponha b fixo e compare o comprimento hiperbólico com o comprimento euclidiano do círculo. Varie b e chegue a uma conclusão a respeito dos comprimentos quando b é muito grande ou muito pequeno.
4. Prove que em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$, dados dois pontos quaisquer z e w , a quantidade

$$J(z, w) = 2 \frac{|z - w|}{(1 - |z|^2)^{1/2} \cdot (1 - |w|^2)^{1/2}} \quad (5.12)$$

é invariante por isometrias. Conclua que

$$\cosh(d(z, w)) = 1 + J(z, w), \quad \sinh\left(\frac{d(z, w)}{2}\right) = \frac{1}{2}J(z, w).$$

(dica: aplique o lema 5.2)

5.4.2 Convexidade e Ângulos em \mathbb{H}^2

Definição 5.8. Uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é convexa se para quaisquer pontos $p, q \in \Omega$ a geodésica ligando p à q esta contida em Ω .

Uma geodésica $\gamma \subset \mathbb{H}^2$ divide \mathbb{H}^2 em duas regiões denominadas de semi-planos. Decorre do modelo de Klein que ambos os semi-planos são convexos. Sejam α e β geodésicas distintas e concorrentes em \mathbb{H}^2 , digamos que $\alpha \cap \beta = \{p\}$, e $\Sigma_\alpha^1, \Sigma_\alpha^2$ os semi-planos determinados por α e $\Sigma_\beta^1, \Sigma_\beta^2$ os determinados por β . Ao fixarmos o semi-plano Σ_α^1 , obtemos as regiões convexas $\Sigma_{\alpha\beta}^{11} = \Sigma_\alpha^1 \cap \Sigma_\beta^1$ e $\Sigma_{\alpha\beta}^{12} = \Sigma_\alpha^1 \cap \Sigma_\beta^2$.

O ângulo formado por α e β é a região $\Sigma_{\alpha\beta}^{1i}$ que, no vértice $p = \alpha(0) = \beta(0)$, o ângulo entre α e β mede

$$\theta = \arccos\left(\frac{g_p(\alpha'(0), \beta'(0))}{|\alpha'(0)|_h \cdot |\beta'(0)|_h}\right).$$

5.4.3 Relações Métricas em Triângulos Hiperbólicos

Ao prolongarmos indefinidamente a única geodésica ligando os pontos A e B obtemos um raio geodésico. Em \mathbb{H}_p^2 , por exemplo, um raio geodésico é um círculo ortogonal à S^∞ . Dizemos que 3 pontos são não colineares em \mathbb{H}^2 se os 3 não pertencem a um mesmo raio geodésico.

Sejam A, B e C três pontos não-colineares no plano hiperbólico e γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} as geodésicas determinadas pelos pares $(A, B), (B, C)$ e (A, C) respectivamente. Considerando que os pontos A, B e C são os únicos pontos de interseção possíveis para as geodésicas, segue que a união $l = \gamma_{AB} \cup \gamma_{BC} \cup \gamma_{CA}$ forma uma curva fechada homeomorfa à S^1 . Pelo teorema da Curva de Jordan-Schönflies ([9]), l borda uma região homeomorfa a $B_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Definição 5.9. O triângulo hiperbólico definido pelos pontos não-colineares A, B e C é a região limitada $\triangle ABC$ definida pelas geodésicas γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} . Os vértices de $\triangle ABC$ são os pontos A, B, C enquanto os lados são as geodésicas γ_{AB}, γ_{BC} e γ_{CA} .

Decorre das propriedades de convexidade que um triângulo é convexo. Os ângulos internos de $\triangle ABC$ são os ângulos \hat{A}, \hat{B} e \hat{C} formados pelos seus lados, nos respectivos vértices. Para efeitos de notação, a medida do lado oposto ao vértice A será denotada por a e a medida do ângulo \hat{A} será denotada por α ; análogamente, denotamos (b, \hat{B}, β) e (c, \hat{C}, γ) , onde as letras latinas minúsculas s ao empregadas para as medidas de lados e letras gregas minúsculas para as medidas de ângulos.

Em \mathbb{H}_p^2 , existem 4 possibilidades a serem analisadas para um triângulo, cujas situações correspondentes em \mathbb{H}^2 são as seguintes; (notação: $\infty = (a, \infty)$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$ fixo)

1. $A, B, C \in \mathbb{H}_p^2 \Rightarrow \triangle ABC \subset \mathbb{H}_p^2$. Neste caso, podemos considerar $A = (0, 0)$, o que implica que os lados γ_{AB}, γ_{AC} são retos.
2. $A \in S^\infty \Rightarrow \triangle ABC \subset \widehat{\mathbb{H}}_p^2$. Neste caso, $\alpha = 0$ e $b = c = \infty$. Em \mathbb{H}^2 , corresponde a uma das seguintes situações;
 - (a) $A = \infty$,

- (b) $A \in \text{eixo-x}$.
3. $A, B \in S^\infty \Rightarrow \triangle ABC \subset \widehat{\mathbb{H}}_P^2$. Neste caso, $\alpha = \beta = 0$ e $a = b = c = \infty$. Em \mathbb{H}^2 , corresponde a uma das seguintes situações;
- (a) $A = \infty$ e B esta sobre o eixo-x,
 (b) $A, B \in \text{eixo-x}$.
4. $A, B, C \in S^\infty \Rightarrow \triangle ABC \subset \widehat{\mathbb{H}}_P^2$. Neste caso, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ e $a = b = c = \infty$. Em \mathbb{H}^2 , corresponde a uma das seguintes situações;
- (a) $A = \infty$ e $B, C \in \text{eixo-x}$,
 (b) $A, B, C \in \text{eixo-x}$.

Para efetuarmos os cálculos, observamos que qualquer triângulo hiperbólico em \mathbb{H}^2 é isométrico a um triângulo com um dos lados sobre uma reta vertical e o outro sobre a circunferência S_1 . O ingrediente básico para deduzirmos as relações métricas é a expressão 5.4.

Teorema 5.4. *Pitágoras - Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico retângulo onde ângulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cdot \cosh(c) \quad (5.13)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideramos que

$$\gamma_{AB} \subset \{0\} \times i\mathbb{R} \quad \text{e} \quad \gamma_{CB} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0, s^2 + t^2 = 1\}.$$

Desta maneira, assumiremos que os vértice do $\triangle ABC$ são os seguintes;

$$A = i, \quad B = ir, \quad C = s + it;$$

onde $r > 1$, $t > 0$ e $s^2 + t^2 = 1$. Segue da expressão 5.4 que

$$\cosh(a) = \frac{1 + r^2}{2rt}, \quad \cosh(b) = \frac{1}{t}, \quad \cosh(c) = \frac{1 + r^2}{2r}, \quad (5.14)$$

e, conseqüentemente, a relação 5.13. \square

Obteremos outras relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo ao explorarmos as expressões 5.14. Decorre da identidade fundamental

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

que

$$\sinh(a) = \frac{\sqrt{(r^2 + 1)^2 - 4r^2t^2}}{2rt} = \frac{\sqrt{(r^2 - 1)^2 - 4s^2t^2}}{2rt} \quad (5.15)$$

$$\sinh(b) = \frac{s}{t}, \quad \sinh(c) = \frac{r^2 - 1}{2r} \quad (5.16)$$

Proposição 5.6. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$\tanh(b) = \text{tg}(\beta) \cdot \sinh(c), \quad \sinh(b) = \text{sen}(\beta) \cdot \sinh(a) \quad (5.17)$$

Demonstração. Suponhamos que o centro do raio geodésico (círculo) obtido ao estendermos o lado γ_{BC} seja $q = (x_0, 0)$. Decorre de $dist(q, B) = dist(q, C)$ que

$$\sqrt{x_0^2 + r^2} = \sqrt{(s - x_0)^2 + t^2} \Rightarrow x_0 = \frac{1 - r^2}{2s}.$$

De acordo com a figura (),

$$tg(\beta) = \frac{r}{|x_0|} = \frac{2sr}{r^2 - 1}. \quad (5.18)$$

Ao compararmos com 5.16 verificamos a relação à esquerda em ???. Também temos as relações

$$sen(\beta) = \frac{2sr}{\sqrt{(r^2 - 1)^2 + r^2}}, \quad cos(\beta) = \frac{r^2 - 1}{2s} \frac{1}{\sqrt{(r^2 + 1)^2 - 4r^2t^2}}, \quad (5.19)$$

da onde verificamos a relação à direita em 5.17. □

O resultado seguinte implica que um triângulo hiperbólico retângulo é determinado, a menos de isometria, pelos ângulos internos.

Corolário 5.5. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico retângulo tal que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$cosh(c) = \frac{cos(\gamma)}{sen(\beta)}, \quad cosh(b) = \frac{cos(\beta)}{sen(\gamma)} \quad (5.20)$$

$$cosh(a) = cotg(\beta).cotg(\gamma). \quad (5.21)$$

Demonstração. Segue da demonstração da proposição 5.6 as relações:

$$tanh(b) = tg(\beta).senh(c), \quad tanh(c) = tg(\gamma).senh(b) \quad (5.22)$$

A segunda relação segue por simetria. Portanto, ao substituirmos as expressões

$$senh(b) = \frac{tanh(c)}{tg(\gamma)}, \quad cosh(b) = \sqrt{\frac{tg^2(\gamma) + tanh^2(c)}{tg^2(\gamma)}}, \quad (5.23)$$

em $tanh(b) = tg(\beta).senh(c)$, temos que

$$senh^2(c).tg^2(\beta) = \frac{tanh^2(c)}{tg^2(\gamma) + tanh^2(c)}. \quad (5.24)$$

Considerando que $tanh^2(c) = \frac{cosh^2(c)-1}{cosh^2(c)}$, ao efetuarmos os cálculos obtemos a relação à esquerda em 5.20; a expressão à direita segue por simetria. 5.21 é consequência imediata das relações obtidas e do teorema de Pitágoras hiperbólico 5.4. □

Exercício 5.6. .

1. Obtenha a versão do Teorema de Pitágoras 5.4 para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^2(K)$.
2. Analise a expressão 5.13 quando $a \sim 0$, $b \sim 0$ e $c \sim 0$ e obtenha o Teorema de Pitágoras Euclideano quando $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ e $c \rightarrow 0$.
3. Justifique os argumentos de simetria utilizados no Corolário 5.5.

Proposição 5.7. *Lei dos Cossenos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\cosh(b)\cosh(c) - \cosh(a)}{\sinh(b)\sinh(c)} & \cos(\beta) &= \frac{\cosh(a)\cosh(c) - \cosh(a)}{\sinh(a)\sinh(c)} \\ \cos(\gamma) &= \frac{\cosh(a)\cosh(b) - \cosh(c)}{\sinh(a)\sinh(b)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Demonstração. Suponhamos que o vértice A esta sobre a origem e o lado γ_{AC} , com comprimento b e oposto ao ângulo medindo α , esta sobre o eixo-x. De acordo com o exercício 2.5.2, temos que

$$z_A = 0, \quad z_B = e^{i\alpha} \cdot \tanh\left(\frac{c}{2}\right), \quad z_C = \tanh\left(\frac{b}{2}\right).$$

De acordo com o exercício 2.7.4, segue que

$$\cosh(a) = 1 + 2 \frac{|z_B|^2 + |z_C|^2 - 2|z_B||z_C|\cos(\alpha)}{(1 - |z_B|^2)(1 - |z_C|^2)}.$$

Ao substituímos os valores de z_B e z_C e aplicarmos a fórmula $\sinh^2(x/2) = \frac{\cosh(x)-1}{2}$, obtemos a expressão

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c) - \sinh(b)\sinh(c)\cos(\alpha),$$

da qual decorre a expressão para $\cos(\alpha)$ em 5.25. □

Corolário 5.6. *Lei dos Senos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente. Então,*

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)} \quad (5.26)$$

Demonstração. Segue da proposição 5.7 que

$$\sin^2(\alpha) = \frac{\sinh^2(b)\sinh^2(c) - (\cosh(b)\cosh(c) - \cosh(a))^2}{\sinh^2(b)\sinh^2(c)} = \quad (5.27)$$

$$= \frac{2\cosh(a)\cosh(b)\cosh(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 1}{\sinh^2(b)\sinh^2(c)}. \quad (5.28)$$

Ao dividirmos o lado direito da expressão acima por $\sinh^2(a)$ ele torna-se invariante por uma permutação do conjunto $\{a, b, c\}$. Analogamente, ao calcularmos $\frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)}$ e $\frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$ verificamos a lei dos senos. □

Corolário 5.7. *Lei dos Cossenos - Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem a , b e c , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \cosh(a) &= \frac{\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)}, & \cosh(b) &= \frac{\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \cos(\beta)}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)} \\ \cosh(c) &= \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\gamma)}{\sin(\alpha)\sin(\beta)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Demonstração. Considere $A = \cosh(a)$, $B = \cosh(b)$ e $C = \cosh(c)$, além disto, seja $D = 2\cosh(a)\cosh(b)\cosh(c) - \cosh^2(a) - \cosh^2(b) - \cosh^2(c) + 1$. De acordo com a equação 5.25, segue que

$$\cos(\alpha) = \frac{BC - A}{(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)^{1/2}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{D}{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}.$$

Analogamente, obtemos expressões para $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$, $\operatorname{sen}(\beta)$ e $\operatorname{sen}(\gamma)$ em função de A, B, C . Desta maneira, segue que

$$\frac{\cos(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{DA}{D} = A.$$

Analogamente, verificamos as expressões 5.29 para $\cosh(b)$ e $\cosh(c)$. \square

Devido ao corolário 5.7, na geometria hiperbólica vale o caso de congruência (AAA);

Teorema 5.5. (*Caso AAA*) - Sejam \triangle_1 e \triangle_2 triângulos hiperbólicos com ângulos internos congruentes, então eles são isométricos.

5.4.4 Área de um Triângulo Hiperbólico

A área de uma região $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ é dada por

$$A(\Omega) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{1}{y^2} dx dy. \quad (5.30)$$

Para efeitos de notação, vamos considerar a seguinte definição;

Definição 5.10. Um gomo hiperbólico em \mathbb{H}^2 é um triângulo hiperbólico com um vértice em $\infty = (x, \infty)$, ou seja, dois lados são retas verticais e o terceiro, limitando inferiormente, é um arco de um círculo com centro sobre o eixo-x (base).

Sendo assim, um gomo hiperbólico em $\mathbb{H}_{\mathcal{P}}^2$ nada mais é do que um triângulo com vértice em $(1, 0) \in \S^{\infty}$.

Lema 5.3. Seja C a base de um gomo hiperbólico Ω e l_1 e l_2 os lados. Se o ângulo formado na interseção de l_1 com C é α e o ângulo formado na interseção de l_2 com C é β , então a área de Ω é

$$A(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta). \quad (5.31)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que l_1 encontra-se a esquerda da origem enquanto l_2 está à direita. Sejam $p_1 = l_1 \cap C$ e $p_2 = l_2 \cap C$ os pontos de interseção. Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid (x - a)^2 + y^2 = R^2\}$. Desta forma, a ordenada de p_1 é $R\cos(\pi - \alpha)$ e a de p_2 é $R\cos(\beta)$. Consequentemente, temos que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid R\cos(\pi - \alpha) \leq x \leq R\cos(\beta), \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}} \leq y \leq \infty\},$$

cujas área é dada por

$$A(\Omega) = \int_{R\cos(\pi - \alpha)}^{R\cos(\beta)} \int_{\frac{1}{\sqrt{R^2 - (x - a)^2}}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$\int_{R\cos(\pi-\alpha)}^{R\cos(\beta)} \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x-a)^2}} dx = \pi - (\alpha + \beta)$$

□

Teorema 5.6. *A área de um triângulo hiperbólico Δ , cujos ângulos internos são α , β e γ , é dada por*

$$A(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (5.32)$$

Demonstração. Sejam A , B e C os vértices de Δ e C_{AB} , C_{BC} e C_{CA} os círculos definidos pelas geodésicas que formam Δ . Agora, seja $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma isometria tal que $f(C_{BC}) = l_1$, onde l_1 é uma reta vertical. Seja l_2 a reta vertical passando por $f(A)$. Portanto, surgem dois gomos hiperbólicos:

1. Ω_1 limitado por l_1 , l_2 e C_{AB} . Os ângulos internos de Ω_1 são α_1 e $\pi - \beta$.
2. Ω_2 limitado por l_1 , l_2 e C_{AC} . Os ângulos internos de Ω_2 são α_2 e γ .

$$\begin{aligned} A(\Delta) &= A_2 - A_1 = [\pi - (\alpha_1 + \pi - \beta)] - [\pi - (\alpha_2 + \gamma)] = \\ &= \pi - [(\alpha_2 - \alpha_1) + \beta + \gamma] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

□

Índice Remissivo

- área
 - de uma região, 17
 - elemento de
 - hiperbólico, 18
- ângulo
 - entre vetores, 15
- Axioma
 - congrência LLL, 30
- comprimento
 - de curva, 16
 - de curva, 17
- coordenadas
 - esféricas, 34
- difemorfismo, 20
- distância, 19
 - esférica, 40
- distância
 - euclideana, 22
- esfera, 33
- espaço
 - euclideano, 21
- espaço
 - esférico, 35
- geodésica, 19
- geometria, 5
 - esférica, 35
- gomo
 - esférico, 45
 - hiperbólico, 18
- grupo, 9
 - O_2 , 25
 - U_1 , 10
 - abeliano, 9
 - cíclico, 12
 - diedral
 - quadrado, 11
 - triângulo, 11
 - finitamente gerado, 12
 - geradores, 12
 - linear, 10
 - multiplicativo, 10
 - ortogonal, 25
 - O_3 , 11
 - SO_2 , 10
 - SO_3 , 12
 - permutações, 11
 - raízes da unidade, 10
 - simétrico, 11
- inteiros, 10
- isometria, 20
 - grupo de, 20
- lei dos cossenos
 - esférica, 41
 - hiperbólica, 64
- lei dos senos
 - hiperbólica, 64
 - esférica, 44
- métrica
 - esférica, 33
 - completa, 19
 - esférica, 17
 - euclideana, 17
 - hiperbólica, 17
 - riemanniana, 17
- métrica
 - hiperbólica, 47
- norma, 15
- orientação, 29
- plano tangente, 13
- produto interno
 - euclideano, 14
- racionais, 10
- reflexão

- reta afim, 27
- sobre reta, 24
- rotação, 22
 - centro em P , 28
- rotações, 10
- símbolo
 - O_2 , 25
 - O_3 , 35
 - R_θ , 23
 - SO_2 , 23
 - $T_{A,b}$, 27
 - T_v , 26
 - \mathbb{E}^3 , 33
 - $d_{\mathbb{E}^2}$, 22
 - $d_{\mathbb{S}^2}$, 40
 - r_l , 24
- símbolo
 - \mathbb{S}^2 , 35
 - SO_3 , 37
- subgrupo, 12
- Teorema Pitágoras
 - esférico, 41
- translação, 26
- triângulo
 - esférico, 41

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, J.L.M. - *Geometria Euclideana*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1995.
- [2] BEARDON, A. - *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag, GTM 91, 1982.
- [3] CARMO, MANFREDO P. - *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [4] CARMO, MANFREDO P. - *Um Clássico da Matemática*, Ciência Hoje, **35**, nº 25, junho/2004, 78-79.
- [5] DORIA, CELSO M. - *Geometrias em 2 Dimensões: Euclideana, Esférica e Hiperbólica*. Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Matemática, <http://www.mtm.ufsc.br>.
- [6] FEEMAN, TIMOTHY G. - *Portraits of the Earth - A Mathematician Looks at Maps*, Mathematical World, vol 18, AMS.
- [7] GAUSS, Karl F. - *General Investigations of Curved Surfaces*, Raven Press, New York, 1965.
- [8] MASSEY, W. - *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, GTM 56, New York, 1977.
- [9] MOISE, EDWIN. - *Geometric Topology in Dimension 2 and 3*, Springer-Verlag, GTM 47, New York 1977.
- [10] NIKULIN, V.V.; SHAFAREVICH, I.R. - *Geometries and Groups*, Universitext, Springer-erlag, New York, 1980, ISBN3-540-15281-4.
- [11] SCOTT, PETER - *The Geometries of 3-Manifolds*, Bull. London Math. Soc., 15 (1983), 401-487.
- [12] SAUNDERS MacLANE, GARRET BIRKHOFF - *Algebra*, The MacMillan Company, New York, 1967.
- [13] STILLWELL, J. - *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag, Universitext, New York 1992.

Universidade Federal de Santa Catarina
Campus Universitario , Trindade
Florianopolis - SC , Brasil
CEP: 88.040-900